Rationalité et périodicité

Marc Lorenzi

30 décembre 2021

Résumé

Il est bien connu que le développement décimal des rationnels est périodique à partir d'un certain rang. La réciproque est-elle vraie ? À partir de quel rang, exactement, le développement est-il périodique ? Et que vaut la période ?

Nous supposons dans ce qui suit que le lecteur est familier avec les notions de l'arithmétique « élémentaire » : développement décimal d'un entier naturel, divisibilité, pgcd, nombres premiers entre-eux, décomposition en produit de nombres premiers, écriture des nombres rationnels sous forme irréductible. Nous utiliserons également le lemme de Gauss : si a, b, c sont trois entiers relatifs tels que a divise bc et a est premier avec b, alors a divise c.

La fin de l'article nécessite des connaissances un peu plus étendues : anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des entiers modulo n, ordre d'un élément dans un groupe, théorème de Lagrange.

1 Développements décimaux

1.1 Nombres décimaux, rationnels, irrationnels

Définition 1. Le réel x est un *nombre décimal* lorsqu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{p}{10^n}$. Nous noterons $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^n}, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

L'ensemble $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$. Toutefois, ce n'est pas un corps : l'inverse d'un nombre décimal n'est en général pas un nombre décimal.

Proposition 1. *Soit $x \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. On a $\frac{1}{x} \in \mathbb{D}$ si et seulement si il existe $\alpha, \beta, n \in \mathbb{N}$ tels que*

$$x = \pm \frac{2^\alpha 5^\beta}{10^n}$$

Démonstration. Supposons que $\frac{1}{x} \in \mathbb{D}$. Écrivons $x = \frac{p}{10^n}$ où $p \in \mathbb{Z}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On a $\frac{1}{x} = \frac{q}{10^m}$ où $q \in \mathbb{Z}^*$ et $m \in \mathbb{N}$. De là,

$$\frac{p}{10^n} = \frac{10^m}{q}$$

ou encore

$$pq = 10^{m+n}$$

Les diviseurs premiers de p divisent donc 10^{m+n}. Ainsi, p n'a que 2 et 5 comme diviseurs premiers. Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ tels que $p = \pm 2^\alpha 5^\beta$.

Inversement, supposons $x = \pm \frac{2^\alpha 5^\beta}{10^n}$ où $\alpha, \beta, n \in \mathbb{N}$. On a

$$\frac{1}{x} = \pm \frac{10^n}{2^\alpha 5^\beta}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{x} = \pm \frac{2^\beta 5^\alpha 10^n}{10^{\alpha+\beta}} \in \mathbb{D}$$

□

Corollaire 2. $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Démonstration. Supposons le contraire. Par la proposition précédente, il existe $\alpha, \beta, n \in \mathbb{N}$ tels que

$$3 \times 10^n = 2^\alpha 5^\beta$$

Le nombre premier 3 divise donc $2^\alpha 5^\beta$, contradiction puisque seuls les nombres premiers 2 et 5 divisent ce produit. □

Définition 2. Le réel x est un *nombre rationnel* lorsqu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$. Nous noterons $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Les réels qui n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$ sont appelés les *irrationnels.*

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$. Pour tout rationnel x, il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p \wedge q = 1$ et $x = \frac{p}{q}$. Ce couple (p, q) est le *représentant irréductible* de x.

Proposition 3. $\log 2$ *est irrationnel.*

Démonstration. Posons $x = \log 2$ (log désigne le logarithme en base 10). Supposons que x est rationnel. Écrivons $x = \frac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{N}^*$. On a $10^x = 2$ et donc $10^{qx} = 2^q$, c'est à dire $10^p = 2^q$ ou encore

$$2^p 5^p = 2^q 5^0$$

Par l'unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers, on en déduit $p = q = 0$, contradiction. □

En résumé : $\mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

1.2 Développements décimaux

Définition 3. Soit $x \in [0,1[$. Un *développement décimal* de x est une suite $(a_k)_{k\geq 1}$ d'entiers appartenant à $[\![0,9]\!]$ telle que

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

Pour le lecteur n'ayant pas de connaissances sur les séries, cela signifie que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} = x$$

Pour noter les choses de façon plus légère, nous écrirons

$$x = 0.a_1a_2a_3\ldots$$

Le but de cet article n'est pas de faire la théorie des développements décimaux. Nous allons ici admettre un certain nombre de résultats. Il faut savoir que tous les réels de $[0,1[$ possèdent un développement décimal. Ils en ont même exactement un seul, *sauf* les nombres décimaux qui en ont deux. Plus précisément, si $x \in \,]0,1[\, \cap \mathbb{D}$, x possède exactement deux développements décimaux distincts $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$. Ces deux développements sont liés : il existe un entier $m \geq 1$ tel que

- Pour tout $k < m$, $a_k = b_k$.
- $a_m = b_m + 1$.
- Pour tout $k > m$, $a_k = 0$.
- Pour tout $k > m$, $b_k = 9$.

Par exemple,

$$\frac{3}{4} = 0.75000\ldots = 0.74999\ldots$$

On a dans cet exemple $m = 2$, $a_2 = 5$ et $b_2 = 4$.

Nous avons écarté de notre théorème le nombre 0, qui est un nombre décimal mais ne possède qu'un seul développement : $0 = 0.000\ldots$ De même pour le nombre 1, qui possède un seul développement avec un zéro avant la virgule : $1 = 0.999\ldots$

Bien entendu, on a aussi $1 = 1.000\ldots$ mais ce développement n'a pas la forme donnée dans la définition 3. On peut bien sûr généraliser cette définition. Si $x \in \mathbb{R}_+$, nous écrirons

$$x = n.a_1a_2a_3\ldots$$

pour exprimer que $n \in \mathbb{N}$ est la partie entière de x et $x - n = 0.a_1a_2a_3\ldots$

Nous n'utiliserons dans ce qui suit que les aspects « naïfs » des développements décimaux. Il n'y aura pas de discussions compliquées concernant des séries. Nous utiliserons juste le fait que multiplier ou diviser un nombre par une puissance de 10 « décale la virgule » vers la droite ou vers la gauche.

Pour illustrer cette idée de naïveté, montrons un petit résultat qui nous fera manipuler nos notations avant de passer à des choses plus délicates.

Proposition 4. *Les réels de* $[0,1[$ *qui possèdent un développement décimal nul à partir d'un certain rang sont les nombres décimaux.*

Démonstration. Soit $x \in [0,1[$. Supposons que x possède un développement décimal nul à partir d'un certain rang. On a donc

$$x = 0.a_1 \dots a_m 000 \dots$$

où $m \in \mathbb{N}$ et les a_k sont des entiers entre 0 et 9. De là, en notant $a = a_1 \dots a_m$,

$$10^m x = a_1 \dots a_m.000 \dots = a$$

et donc

$$x = \frac{a}{10^m} \in \mathbb{D}$$

Inversement, supposons $x \in \mathbb{D}$. On a donc $x = \frac{p}{10^m}$ où $p, m \in \mathbb{N}$ et $p < 10^m$. De là, $10^m x = p$. Écrivons $p = a_1 \dots a_m$ où les a_k sont les chiffres du développement décimal de l'entier p. On a donc

$$10^m x = a_1 \dots a_m.0000 \dots$$

d'où, en divisant par 10^m,

$$x = 0.a_1 \dots a_m 000 \dots$$

Le développement décimal de x est donc nul à partir du rang $m+1$. $\square$

2 Rationalité et périodicité

2.1 Suites ultimement périodiques

Nous allons maintenant nous intéresser aux réels qui possèdent un développement décimal *ultimement périodique*.

Définition 4. Soit $a = (a_k)_{k \geq 1}$ une suite à valeurs dans un ensemble E. Un couple $(m, T) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ est un *couple remarquable* de la suite lorsque

$$\forall k > m, a_{k+T} = a_k$$

Nous noterons $\mathcal{T}(a)$ l'ensemble des couples remarquable de la suite a :

$$\mathcal{T}(a) = \{(m, T) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \forall k > m, a_{k+T} = a_k\}$$

La suite est *ultimement périodique* lorsque $\mathcal{T}(a) \neq \emptyset$. Si la suite est ultimement périodique et $(m, T) \in \mathcal{T}(a)$, T est une *période* de la suite.

Une suite ultimement périodique possède beaucoup de couples remarquables. Quels sont-ils exactement ? Commençons par quelque chose de facile.

Lemme 5. *Soit a une suite ultimement périodique. Soit $(m, T) \in \mathcal{T}(a)$. Alors, pour tout $m' \geq m$ et tout $q \geq 1$, $(m', qT) \in \mathcal{T}(a)$.*

Démonstration. Tout d'abord, $(m', T) \in \mathcal{T}(a)$. En effet, pour tout $k > m$, $a_{k+T} = a_k$, c'est donc encore le cas pour tout $k > m'$. Montrons maintenant par récurrence sur q que pour tout $q \geq 1$, $(m', qT) \in \mathcal{T}(a)$. Nous venons de le faire pour $q = 1$. Soit $q \geq 1$. Supposons que $(m', qT) \in \mathcal{T}(a)$. Soit $k > m'$. On a

$$a_{k+(q+1)T} = a_{(k+T)+qT}$$

Comme $k + T > k > m'$, par l'hypothèse de récurrence on a $a_{(k+T)+qT} = a_{k+T}$. Comme $(m', T) \in \mathcal{T}(a)$ et $k > m'$, $a_{k+T} = a_k$. Ainsi, pour tout $k > m'$,

$$a_{k+(q+1)T} = a_k$$

et donc $(m', (q+1)T) \in \mathcal{T}(a)$. $\square$

Peut-on caractériser complètement les éléments de $\mathcal{T}(a)$? Oui. La preuve est élémentaire mais un peu tortueuse.

Proposition 6. *Soit a une suite ultimement périodique. Il existe un unique couple $(m_0, T_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $(m, T) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $(m, T) \in \mathcal{T}(a)$ si et seulement si $m \geq m_0$ et T est un multiple de T_0.*

Plus formellement,

$$\mathcal{T}(a) = (m_0 + \mathbb{N}) \times (T_0\mathbb{N}^*)$$

Démonstration. Commençons par l'unicité. Soient (m_0, T_0) et (m_1, T_1) deux tels couples. Alors $m_0 \leq m_1$ et $m_1 \leq m_0$, donc $m_0 = m_1$. De même T_0 et T_1 se divisent l'un l'autre. Comme ce sont des entiers naturels, $T_0 = T_1$.

Prouvons maintenant l'existence. L'ensemble des périodes de la suites est une partie de $\mathbb{N}^*$, il possède donc un plus petit élément T_0. Ensuite, l'ensemble des entiers $m \in \mathbb{N}$ tel que $(m, T_0) \in \mathcal{T}(a)$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, il possède donc un plus petit élément m_0. Nous allons montrer que le couple (m_0, T_0) répond à la question.

Par le lemme 5, pour tout $m \geq m_0$ et pour tout $q \geq 1$, $(m, qT_0) \in \mathcal{T}(a)$.

Inversement, soit $(m, T) \in \mathcal{T}(a)$. Soit $m' = \max(m_0, m)$. Par le lemme 5, (m', T_0) et (m', T) appartiennent à $\mathcal{T}(a)$. Faisons la division euclidienne de T par T_0 : $T = qT_0 + r$ où $r, q \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < T_0$. Par minimalité de T_0, on a $T \geq T_0$ et donc $q \geq 1$. Ainsi, (m', qT_0) est aussi un couple remarquable. On a pour tout $k > m'$,

$$a_{k+T} = a_{k+r+qT_0} = a_{k+r}$$

Mais $a_{k+T} = a_k$, donc pour tout $k > m'$,

$$a_{k+r} = a_k$$

Ainsi, en supposant un court instant $r \geq 1$, on a $(m', r) \in \mathcal{T}(a)$ donc r est une période de la suite. Contradiction puisque $r < T_0$ et T_0 est la plus petite période. Ainsi, $r = 0$ et donc $T = qT_0$.

Il reste à montrer que $m \geq m_0$. Supposons pour cela un court instant que $m < m_0$. Par minimalité de m_0, on a donc $T \neq T_0$, c'est à dire $q \geq 2$. Comme $(m, T) \in \mathcal{T}(a)$ et $m_0 > m$, $a_{m_0+T} = a_{m_0}$. Rappelons que $T = qT_0$. L'égalité précédente peut s'écrire

$$a_{(m_0+T_0)+(q-1)T_0} = a_{m_0}$$

Remarquons que comme $q \geq 2$, $(m_0, (q-1)T_0) \in \mathcal{T}(a)$. Comme $m_0 + T_0 > m_0$, on a donc aussi

$$a_{(m_0+T_0)+(q-1)T_0} = a_{m_0+T_0}$$

Ainsi,

$$a_{m_0+T_0} = a_{m_0}$$

Mais on a aussi pour tout $k > m_0$,

$$a_{k+T_0} = a_k$$

Ainsi, pour tout $k > m_0 - 1$,

$$a_{k+T_0} = a_k$$

et donc $(m_0 - 1, T_0) \in \mathcal{T}(a)$. Contradiction, par la minimalité de m_0. $\square$

Définition 5. Avec les notations qui précèdent,

- (m_0, T_0) est le couple remarquable *minimal* de la suite.
- L'entier T_0 est **la** période de la suite.
- L'entier m_0 est **la** *pré-période* de la suite.

Exemple. Soit $x \in \mathbb{D}$. Les deux développements décimaux de x sont ultimement périodiques, et tous les deux sont de période 1. Le couple remarquable minimal de x est de la forme $(m, 1)$ où $m \in \mathbb{N}$.

Prenons deux autres exemples avant de nous attaquer à la généralité.

Exemple. Le développement décimal de $\frac{5}{13}$ est périodique. Son couple remarquable minimal est $(0, 6)$:

$$\frac{5}{13} = 0.\overline{384615}$$

où la barre horizontale signifie que les 6 chiffres 384615 sont répétés *ad infinitum*. Remarquons que, par exemple, puisque $5 \geq 0$ et $12 = 2 \times 6$, $(5, 12)$ est aussi un couple remarquable du développement décimal de cette fraction :

$$\frac{5}{13} = 0.38461\overline{538461538461}$$

Exemple. Le développement décimal de $\frac{5}{28}$ est ultimement périodique. Son couple remarquable minimal est $(2, 6)$:

$$\frac{5}{28} = 0.17\overline{857142}$$

Même remarque que pour l'exemple précédent. On a aussi, par exemple,

$$\frac{5}{28} = 0.17857\overline{142857142857}$$

Quelques questions que l'on peut se poser sont :

- Pourquoi le premier développement décimal est-il périodique ?
- Pourquoi le second développement est-il « seulement » ultimement périodique ? Et pourquoi la périodicité commence-t-elle à partir du rang 3, et pas 2 ou 5 ?
- Pourquoi les périodes sont-elles égales à 6, et pas 5, 8 ou 11 ?
- Le développement décimal de $\log 2$ est-il ultimement périodique ?

2.2 Ultimement périodique $\Longrightarrow$ rationnel

Commençons par répondre à la dernière question, c'est le plus facile.

Soit $x \in [0, 1[$. Supposons que x possède un développement décimal $a = (a_k)_{k\geq 1}$ ultimement périodique. Soit $(m, T) \in \mathcal{T}(a)$. Écrivons un peu abusivement

$$x = 0.bccc\ldots = 0.b\overline{c}$$

où $b = a_1 \ldots a_m$ et $c = a_{m+1} \ldots a_{m+T}$. Soit $y = 10^m x - b$. On a

$$y = 0.\overline{c}$$

puis

$$10^T y = c.\overline{c} = c + y$$

d'où

$$y = \frac{c}{10^T - 1}$$

et ainsi

$$x = \frac{1}{10^m}\left(b + \frac{c}{10^T - 1}\right)$$

ou encore

$$x = \frac{b\left(10^T - 1\right) + c}{10^m\left(10^T - 1\right)}$$

Nous avons donc prouvé le résultat ci-dessous.

Proposition 7. *Soit $x \in [0, 1[$. Si x possède un développement décimal ultimement périodique, alors $x \in \mathbb{Q}$.*

En contraposant, le développement décimal de $\log 2$ n'est donc pas périodique.

Exemple. Soit $x = 0.32\overline{123}$. Le couple remarquable minimal du développement de x est $(2, 3)$. Soit $y = 100x - 32$. On a

$$y = 0.\overline{123}$$

et donc

$$1000y = 123.\overline{123} = 123 + y$$

De là,

$$y = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$$

puis

$$x = \frac{y + 32}{100} = \frac{10697}{33300}$$

2.3 Rationnel $\Longrightarrow$ ultimement périodique

Proposition 8. *Soit $x \in [0,1[$. Si $x \in \mathbb{Q}$, alors x possède un développement décimal ultimement périodique.*

Montrons d'abord un lemme.

Lemme 9. *Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On suppose que q est premier avec 10. Il existe alors un entier $T \geq 1$ tel que $10^T \equiv 1 \mod q$.*

Démonstration. L'ensemble $\{10^n, n \in [\![0,q]\!]\}$ possède $q+1$ éléments, alors qu'il n'y a que q restes modulo q. Il existe donc deux entiers $0 \leq i < j \leq q$ tels que

$$10^j \equiv 10^i \mod q$$

Dit autrement, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que que

$$10^j - 10^i = kq$$

ce qui peut encore s'écrire

$$10^i(10^{j-i} - 1) = kq$$

q est premier avec 10, donc aussi avec 10^i. Par le lemme de Gauss, q divise $10^{j-i} - 1$. Posons $T = j - i$. On a $T \geq 1$ d'où le résultat. $\square$

Remarque. La preuve ci-dessus est élémentaire et n'utilise que le lemme de Gauss. Son inconvénient est que l'on n'a aucune idée de la valeur de l'entier T, si ce n'est que $T \leq q$. En réalité il y a beaucoup plus à dire, nous serons plus précis à ce sujet dans la dernière partie de l'article.

Montrons tout d'abord la proposition dans un cas particulier.

Soit $x \in [0,1[\cap \mathbb{Q}$. Écrivons $x = \frac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, $p < q$ et $p \wedge q = 1$.

Supposons dans un premier temps que $q \wedge 10 = 1$. Par le lemme, il existe $T \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}$ (un tel k ne peut être négatif) tels que

$$10^T = 1 + kq$$

On a donc

$$10^T x = x + kp = x + b$$

où $b = kp$. Écrivons $x = 0.a_1a_2\ldots$. L'égalité précédente donne

$$a_1 \ldots a_T.a_{T+1} \ldots = 0.a_1 \ldots + b$$

Ceci peut encore s'écrire

$$a_1 \ldots a_T + 0.a_{T+1} \ldots = b + 0.a_1 \ldots$$

Le nombre $x = 0.a_1a_2a_3\ldots$ n'est pas un nombre décimal, car q est premier avec 10. Il possède donc un unique développement décimal, ce qui nous autorise dans l'égalité ci-dessus à faire des identifications. On a donc

$$\begin{cases} b & = \quad a_1 \ldots a_T \\ 0.a_{T+1} \ldots & = \quad 0.a_1 \ldots \end{cases}$$

La deuxième inégalité montre que la suite $(a_k)_{k\geq 1}$ est périodique, de période T.

Venons-en au cas général.

Supposons maintenant que q n'est pas nécessairement premier avec 10. La phrase qui précède est une façon très compliquée de dire que nous ne supposons rien. Soit $\alpha = \nu_2(q)$ la *valuation* 2-adique de q, c'est à dire le plus grand entier naturel tel que 2^α divise q. De même, soit $\beta = \nu_5(q)$ la valuation 5-adique de q. Soit $m = \max(\alpha, \beta)$. Considérons

$$y = 10^m x = \frac{10^m p}{q} = \frac{p'}{q'}$$

où $q' = \frac{q}{2^\alpha 5^\beta}$ est premier avec 10. Il est possible que y soit supérieur à 1. Soit a la partie entière de y. Remarquons que comme $x \in [0, 1[$, on a $a \in [\![0, 10^m - 1]\!]$. On a

$$y = a + \frac{p''}{q'}$$

où $p'', q' \in \mathbb{N}$, $q' > 0$, $p'' < q'$, $p'' \wedge q' = 1$ et q' est premier avec 10. Par l'étude faite dans le cas particulier, $\frac{p''}{q'}$ possède un développement décimal périodique de période T. En posant $\frac{p''}{q'} = 0.\overline{c}$ où c est de longueur T, on a donc

$$10^m x = a.\overline{c}$$

Il reste à diviser par 10^m pour constater que

$$x = 0.a\overline{c}$$

où, un peu abusivement, on a rajouté des zéros à gauche de la représentation décimale de l'entier a pour avoir une représentation de a avec exactement m chiffres. Le développement décimal de x est ainsi ultimement périodique, et (m, T) est un couple remarquable de ce développement.

2.4 Comment fabriquer des irrationnels

Ce qui précède montre que tout réel $x \in [0, 1[$ dont le développement décimal n'est pas ultimement périodique est un irrationnel. Il est donc facile de fabriquer autant d'irrationnels que l'on veut. Par exemple, est irrationnel (exercice !) le réel

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k^2}}$$

Son développement décimal est

$$x = 0.1001000010000001\ldots$$

où les 1 apparaissent aux positions qui sont des carrés. Avouons-le, cet irrationnel est assez artificiel. Une question intéressante (et mal posée) serait : est-on capable de trouver un irrationnel « simple et intéressant » dont on puisse donner explicitement le développement décimal ? Disons, pour fixer les idées, un irrationnel exprimable à l'aide des fonctions élémentaires dont les chiffres du développement décimal s'expriment aussi à l'aide des fonctions élémentaires ? A priori rien ne l'empêche mais je n'en connais pas. Ce serait un irrationnel du genre $\sqrt{5}$ ou $\log 2$ dont on puisse dire instantanément : le trilliardième chiffre après la virgule de ce nombre est un 7. La question reste ouverte ...

2.5 La période du développement

Soit $x \in [0,1[\ \cap \mathbb{Q}$. Plaçons nous d'abord dans le cas où le représentant irréductible (p,q) de x vérifie $q \wedge 10 = 1$. Le développement décimal de x est alors périodique. Soit T sa période. Il existe T entiers $a_1, \ldots, a_T \in [\![0,9]\!]$ tels que

$$x = 0.\overline{a_1 \ldots a_T}$$

et T est le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. On a alors

$$10^T x = a_1 \ldots a_T + x$$

Autrement dit, T est le plus petit entier non nul tel que $(10^T - 1)\frac{p}{q} \in \mathbb{N}$, c'est à dire tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que q divise $(10^T - 1)p$. Comme p et q sont premiers entre eux ceci équivaut à dire (lemme de Gauss) que q divise $10^T - 1$. En d'autres termes, T est le plus petit entier non nul tel que

$$10^T \equiv 1 \bmod q$$

Plaçons-nous dans l'anneau $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ des entiers modulo q. Les éléments inversibles de cet anneau sont les classes des entiers entre 0 et $q-1$ qui sont premiers avec q. Ces classes forment un groupe multiplicatif $\mathbb{G}$ de cardinal $\varphi(q)$ où φ est la *fonction indicatrice d'Euler* : $\varphi(q)$ est le nombre d'entiers inférieurs à q et premiers avec q. Comme $q \wedge 10 = 1$, la classe de 10 appartient à $\mathbb{G}$, et T est finalement *l'ordre* de la classe de 10 dans le groupe $\mathbb{G}$. Par le théorème de Lagrange, T divise $\varphi(q)$. Remarquons toutefois que T peut être un diviseur strict de q.

Pour résumer :

Si q est premier avec 10, le couple remarquable minimal du développement de x est $(0,T)$ où T est l'ordre de la classe de 10 dans le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Voici les valeurs de T pour les entiers $q \leq 30$ premiers avec 10. On donne aussi dans le tableau la valeur de $\varphi(q)$. Les nombres de la deuxième ligne divisent donc ceux de la troisième ligne. On a $T = \varphi(q)$ si et seulement si l'ordre de 10 dans le groupe $\mathbb{G}$ est le cardinal de $\mathbb{G}$, c'est à dire lorsque 10 est un *générateur* de $\mathbb{G}$.

q	1	3	7	9	11	13	17	19	21	23	27	29
T	1	1	6	1	2	6	16	18	6	22	3	28
$\varphi(q)$	1	2	6	6	10	12	16	18	12	22	18	28

Exemple. Reprenons le premier exemple vu plus haut. Prenons $x = \frac{5}{13}$. Ici, $q = 13$. On a $\varphi(q) = 12$ donc l'ordre de 10 dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ divise 12. Il s'avère que cet ordre est 6. Le développement décimal de $\frac{5}{13}$ est donc périodique, de période 6. Le couple remarquable minimal du développement est $(0,6)$.

Dans le cas où q n'est pas nécessairement premier avec 10, la discussion faite au paragraphe 2.3 montre que la période du développement est celle de $\frac{p''}{q'}$ où $q' = q \,/\, \left(2^{\nu_2(q)} 5^{\nu_5(q)}\right)$. Cette période est donc l'ordre de la classe de 10 dans le groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z}$.

Pour résumer :

Dans le cas général, soit m la plus grande puissance de 2 ou de 5 qui divise q. Soit q' l'entier q « débarrassé de ses diviseurs 2 et 5 ». Le couple remarquable du développement de x est (m, T) où T est l'ordre de la classe de 10 dans le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z}$.

Voici les valeurs de m et T pour les entiers $q \leq 28$ qui ne sont pas premiers avec 10. On donne également dans le tableau la valeur de q'. Remarquons que les nombres décimaux sont ceux pour lesquels $q' = 1$.

q	2	4	5	6	8	10	12	14	15	16	18	20	22	24	25	26	28
q'	1	1	1	3	1	1	3	7	3	1	9	1	11	3	1	13	7
m	1	2	1	1	3	1	2	1	1	4	1	2	1	3	2	1	2
T	1	1	1	1	1	1	1	6	1	1	1	1	2	1	1	6	6

Exemple. Reprenons le deuxième exemple vu plus haut. Prenons $x = \frac{5}{28}$. Ici, $q = 28$ et $q' = 7$. On a $\varphi(q') = 6$ donc l'ordre de 10 dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ divise 6. Il s'avère que cet ordre est 6. Le développement décimal de $\frac{5}{28}$ est donc ultimement périodique, de période 6. Pour creuser un peu, on a $\alpha = \nu_2(28) = 2$ et $\beta = \nu_5(28) = 0$. De là, $m = \max(\alpha, \beta) = 2$. Le développement décimal de $10^2 x$ est donc périodique, et le développement décimal de x est périodique à partir du rang 3. Le couple remarquable minimal du développement est $(2, 6)$.

3 Bilan

Soit x un rationnel de l'intervalle $[0, 1[$.

Supposons connu un représentant irréductible (p, q) de x. Nous avons vu dans cet article comment obtenir à partir de q le couple remarquable minimal (m, T) du développement décimal de x. Écrivons $x = 0.b\overline{c}$ où b est un entier de m chiffres (avec d'éventuels zéros comme premiers chiffres) et c est un entier de T chiffres (même remarque). À partir de m, T, p et q, il est alors facile de calculer b et c. En effet,

$$10^m x = \frac{10^m p}{q} = b.\overline{c}$$

et donc

$$b = \left\lfloor \frac{10^m p}{q} \right\rfloor$$

Ainsi, b est le quotient de la division euclidienne de $10^m p$ par q. Écrivons cette division :

$$10^m p = bq + r$$

où $0 \leq r < q$. De là,

$$\frac{10^m p}{q} = b + \frac{r}{q} = b.\overline{c} = b + 0.\overline{c}$$

et donc

$$\frac{r}{q} = 0.\overline{c}$$

Multipliant par 10^T, on obtient

$$\frac{10^T r}{q} = c.\overline{c}$$

d'où

$$c = \left\lfloor \frac{10^T r}{q} \right\rfloor$$

c est donc le quotient de la division euclidienne de $10^T r$ par q.

Pour résumer, connaissant p et q, on peut calculer de façon effective les entiers m, T, b et c.

Inversement, si l'on connaît le développement décimal de x, et donc les entiers m, T, b et c, il est facile d'obtenir p et q. Nous avons en effet vu à la section 2.2 que

$$x = \frac{b\left(10^T - 1\right) + c}{10^m\left(10^T - 1\right)}$$

Ainsi, $x = \frac{p}{q}$ où

$$\left\{ \begin{array}{lcl} p & = & b\left(10^T - 1\right) + c \\ q & = & 10^m\left(10^T - 1\right) \end{array} \right.$$

Ces deux entiers p et q peuvent fort bien ne pas être premiers entre-eux, mais un simple calcul de pgcd permet de trouver un représentant irréductible de x.

4 Projet Python

1. Écrire une fonction Python `recomposer` prenant en paramètres un quadruplet d'entiers (m, T, b, c) et renvoyant un couple (p, q) tel que $0 \leq p < q$, p et q soient premiers entre-eux, et si $x = \frac{p}{q}$, (m, T) soit un couple remarquable du développement décimal de x, et $x = 0.b\overline{c}$.
2. Écrire une fonction `ordre10` prenant en paramètre un entier $q \geq 1$ et renvoyant le plus petit entier $T \geq 1$ tel que $10^T \equiv 1 \bmod q$.
3. Écrire une fonction Python `couple_remarquable` prenant en paramètre un couple d'entiers (p, q) tel que p et q soient premiers entre-eux et $0 \leq p < q$, et renvoyant un couple (m, T) tel que, si $x = \frac{p}{q}$, (m, T) soit le couple remarquable minimal du développement décimal de x.
4. Écrire une fonction Python `developper` prenant en paramètre un couple d'entiers (p, q) tel que p et q soient premiers entre-eux et $0 \leq p < q$ et renvoyant un quadruplet (m, T, b, c) tel que, si $x = \frac{p}{q}$, (m, T) soit le couple remarquable minimal du développement décimal de x, et $x = 0.b\overline{c}$.
5. Exécuter `recomposer(developper((p, q))` pour tous les couples (p, q) tels que $0 \leq p < q \leq 1000$ et vérifier que la réponse est toujours (p, q).
6. Quelle est la plus grande période possible des rationnels de $[0, 1[$ de dénominateur inférieur à 1000 ?

5 Annexe - Table de valeurs

La table ci-dessous donne pour $2 \leq q \leq 41$ le couple remarquable minimal (m, T) du développement décimal de $\frac{1}{q}$ et les valeurs de b et c tels que $\frac{1}{q} = 0.b\overline{c}$. Une case vide dans la colonne b indique un développement périodique ($m = 0$).

q	m	T	b	c
2	1	1	5	0
3	0	1		3
4	2	1	25	0
5	1	1	2	0
6	1	1	1	6
7	0	6		142857
8	3	1	125	0
9	0	1		1
10	1	1	1	0
11	0	2		09
12	2	1	08	3
13	0	6		076923
14	1	6	0	714285
15	1	1	0	6
16	4	1	0625	0
17	0	16		0588235294117647
18	1	1	0	5
19	0	18		052631578947368421
20	2	1	05	0
21	0	6		047619
22	1	2	0	45
23	0	22		0434782608695652173913
24	3	1	041	6
25	2	1	04	0
26	1	6	0	384615
27	0	3		037
28	2	6	03	571428
29	0	28		0344827586206896551724137931
30	1	1	0	3
31	0	15		032258064516129
32	5	1	03125	0
33	0	2		03
34	1	16	0	2941176470588235
35	1	6	0	285714
36	2	1	02	7
37	0	3		027
38	1	18	0	263157894736842105
39	0	6		025641
40	3	1	025	0
41	0	5		02439