

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1$$

Marc Lorenzi

11 avril 2022

1 Introduction

Soient $n \in \mathbb{N}$ et x un réel différent de 1. On a

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Si $|x| < 1$, alors x^{n+1} tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et donc

$$\sum_{k=0}^n x^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - x}$$

Nous noterons

$$(\star) \quad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}$$

Juste pour rire, prenons $x = 2$ dans l'égalité ci-dessus. C'est bien sûr absurde, puisque cette égalité n'est vérifiée que si $|x| < 1$. Nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = -1$$

L'histoire pourrait s'arrêter là, mais ce n'est pas le cas. Au sens *usuel* de la notion de limite, $(\star)$ est effectivement une absurdité. Mais nous allons voir qu'il est possible de définir sur l'ensemble $\mathbb{Q}$ une notion de limite, tout à fait différente de la notion usuelle, pour laquelle $(\star)$ est vérifiée..

2 La valuation dyadique

Soit $x \in \mathbb{Q}^*$. Le rationnel x s'écrit de façon unique

$$x = 2^\alpha x'$$

où $\alpha \in \mathbb{Z}$ et x' est un rationnel dont le numérateur et le dénominateur sont impairs. Posons alors

$$\nu(x) = \alpha$$

L'entier ν est la *valuation dyadique* de x . Posons également $\nu(0) = +\infty$.

On convient évidemment que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n < +\infty$, $n + \infty = \infty$ et $+\infty + \infty = +\infty$.

Pour prendre quelques exemples, $\nu(12) = 2$, $\nu(17) = 0$, $\nu\left(\frac{3}{4}\right) = -2$, $\nu\left(\frac{22}{7}\right) = 1$.

Proposition 1. *Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,*

- $\nu(x + y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$. *Si $\nu(x) \neq \nu(y)$, on a égalité.*
- $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{Q}$. Si $x = 0$ ou $y = 0$ les deux résultats sont évidents. Supposons donc x et y non nuls.

Posons $x = 2^\alpha \frac{p}{q}$ et $y = 2^\beta \frac{r}{s}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ et p, q, r, s sont impairs.

- Si $x + y = 0$, le résultat est évident. Supposons donc $x + y \neq 0$. Supposons par exemple $\alpha \leq \beta$. On a

$$\begin{aligned} x + y &= 2^\alpha \left(\frac{p}{q} + 2^{\beta-\alpha} \frac{r}{s} \right) \\ &= 2^\alpha \frac{ps + 2^{\beta-\alpha} qr}{qs} \end{aligned}$$

On a qs impair car q et s sont impairs. Si $\alpha < \beta$, alors $ps + 2^{\beta-\alpha} qr$, somme d'un nombre impair et d'un nombre pair, est impair. Ainsi, $\nu(x + y) = \alpha$. Si $\alpha = \beta$, écrivons

$$ps + 2^{\beta-\alpha} qr = 2^\gamma t$$

où $\gamma \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{Z}$. On a alors

$$x + y = 2^{\alpha+\gamma} \frac{t}{qs}$$

et donc $\nu(x + y) = \alpha + \gamma \geq \alpha$.

- On a

$$xy = 2^{\alpha+\beta} \frac{pr}{qs}$$

Comme pr et qs sont impairs, on en déduit que $\nu(xy) = \alpha + \beta$.

□

3 Une distance ultramétrique sur $\mathbb{Q}$

Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$, posons

$$d(x, y) = \frac{1}{2^{\nu(x-y)}}$$

en convenant que $2^{-\infty} = 0$. $d(x, y)$ est la *distance dyadique* entre les rationnels x et y . Cette appellation est justifiée par la proposition suivante.

Proposition 2. La fonction $d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ est une **distance ultramétrique** sur $\mathbb{Q}$:

- Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,
 - $d(x, y) \geq 0$.
 - $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
 - $d(x, y) = d(y, x)$.
- Pour tous $x, y, z \in \mathbb{Q}$,

$$d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$$

Démonstration. Le premier point ne pose pas de difficulté. Montrons le second point. Soient $x, y, z \in \mathbb{Q}$. On a $x - z = (x - y) + (y - z)$. De là,

$$\nu(x - z) \geq \min(\nu(x - y), \nu(y - z))$$

et donc

$$\begin{aligned} d(x, z) &= 2^{-\nu(x-z)} \\ &\leq 2^{-\min(\nu(x-y), \nu(y-z))} \\ &= 2^{\max(-\nu(x-y), -\nu(y-z))} \\ &= \max\left(2^{-\nu(x-y)}, 2^{-\nu(y-z)}\right) \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

□

Le second point de la proposition est appelé *l'inégalité ultramétrique*. Remarquons que le max de deux réels positifs est plus petit que leur somme, et donc que l'inégalité ultramétrique entraîne l'inégalité triangulaire. Pour tous $x, y, z \in \mathbb{Q}$,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

La fonction d est donc une *distance* sur $\mathbb{Q}$, au sens usuel du terme. Bien entendu, d est très différente de la distance usuelle δ sur $\mathbb{Q}$, définie par $\delta(x, y) = |y - x|$.

4 Une nouvelle notion de limite

Le couple $(\mathbb{Q}, d)$ est ce que l'on appelle un *espace métrique*. Dans tout espace métrique, il est possible de définir une notion de limite : la suite u tend vers la limite ℓ lorsque la distance de u_n à ℓ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Définition 1. Soit $u = (u_n)_{n \geq 0}$ une suite de rationnels. Soit $\ell \in \mathbb{Q}$. On dit que la suite u tend vers ℓ lorsque $d(u_n, \ell)$ tend vers 0 au sens usuel de limite d'une suite réelle. Nous noterons

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$$

De façon plus explicite, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(u_n, \ell) \leq \varepsilon$$

5 Promesse tenue

Proposition 3.

$$\sum_{k=0}^n 2^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -1$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$u_n = \sum_{k=0}^n 2^k$$

Montrons que la suite u tend vers -1 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_n - (-1) &= 1 + \sum_{k=0}^n 2^k \\ &= 1 + \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \\ &= 2^{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\nu(u_n - (-1)) = n + 1$$

et donc

$$d(u_n, -1) = \frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

c'est à dire

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -1$$

□