Cardinalité

Marc Lorenzi

30 juin 2022

1 Notion de cardinalité

1.1 Ensembles équipotents

Deux ensembles finis A et B sont en bijection si et seulement si ils ont le même nombre d'éléments. Pour des ensembles infinis, parler du nombre d'éléments, ou encore de ce que l'on appelle le cardinal, n'a *a priori* aucun sens. En revanche, dire que deux ensembles quelconques sont en bijection ne pose aucun problème.

Définition 1. Les ensembles A et B sont *équipotents* s'il existe une bijection de A sur B. On note alors $A \sim B$.

La relation d'équipotence est clairement une relation d'équivalence sur l'univers de tous les ensembles.

Nous ne définirons pas dans cet article le *cardinal* d'un ensemble infini. Nous parlerons plutôt de *cardinalité*. Par parler *du* cardinal d'un ensemble A, il nous faudrait choisir parmi tous les ensembles équipotents à A un ensemble très très particulier, *son* cardinal. Pour choisir un tel ensemble de façon rationnelle, il faut utiliser la *théorie des ordinaux*. Nous ne le ferons pas.

Définition 2. Soit A un ensemble. La *cardinalité* de A est la classe de tous les ensembles équipotents à A. Nous la noterons $|A|$.

La cardinalité de l'ensemble A est donc la classe d'équivalence de A modulo la relation d'équipotence. On a de façon immédiate que pour tous ensembles A, B, C,

- $|A| = |A|$.
- Si $|A| = |B|$ alors $|B| = |A|$.
- Si $|A| = |B|$ et $|B| = |C|$ alors $|A| = |C|$.

1.2 Classes et ensembles

On peut en fait prouver que la cardinalité d'un ensemble A n'est pas un ensemble, mais ce que les théoriciens des ensembles appellent une *classe propre*. Disons pour faire simple qu'une classe propre est une collection d'ensembles qui n'est pas elle-même un ensemble. Ainsi, la classe $|A|$ contient « trop » d'ensembles pour être elle même un ensemble. Par exemple :

Proposition 1. $|\{\emptyset\}|$ *n'est pas un ensemble.*

Démonstration. la classe de $\{\emptyset\}$ contient tous les singletons, et donc tous les ensembles $\{E\}$ où E est un ensemble quelconque. Supposons que cette classe soit un ensemble. Alors

$$\mathcal{U} = \bigcup_{X \in |\{\emptyset\}|} X$$

est aussi un ensemble, et cet ensemble contient tous les ensembles. $\mathcal{U}$ est donc l'univers de tous les ensembles. Il se trouve que cet univers n'est pas un ensemble. En effet, si c'était le cas, on pourrait alors considérer l'ensemble

$$E = \{X \in \mathcal{U} : X \notin X\}$$

On aurait alors $E \in E \iff E \notin E$, contradiction. □

Exercice. En fait, il existe une cardinalité qui est un ensemble. Laquelle ?

Après ces quelques considérations, nous aurons compris qu'il ne sera pas possible de parler de l'ensemble des cardinalités, ni même de la classe des cardinalités. En revanche, rien ne nous empêchera de parler de propriétés vérifiées par les cardinalités.

1.3 Ensembles finis, ensembles infinis

Un ensemble E est *fini* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $E \sim [\![0, n-1]\!]$. L'entier n est alors unique, c'est le *cardinal* de E. Sinon, E est *infini*. Si E est un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$, il existe effectivement dans la classe $|E|$ un ensemble qui peut être choisi de façon rationnelle : c'est justement l'ensemble $[\![0, n-1]\!]$, que nous noterons $\mathbf{n}$. Nous nous permettrons d'écrire $|E| = n$, bien qu'en toute rigueur nous devions écrire $|E| = |\mathbf{n}|$.

Par exemple, $\mathbf{2} = \{0, 1\}$, et $|\mathbf{2}|$ est la classe de tous les ensembles à 2 éléments. Si un ensemble E appartient à cette classe, nous noterons donc abusivement $|E| = 2$.

Nous supposerons dans la suite que le lecteur maîtrise les connaissances de base sur les ensembles finis (cardinal d'une union disjointe, d'un produit cartésien, etc.).

Nous dirons qu'une cardinalité est finie lorsqu'elle est la cardinalité d'au moins un ensemble A fini. Tous les ensembles équipotents à A sont alors finis. Nous confondrons les cardinalités finies et les entiers naturels. Le lecteur est invité, à chaque fois que l'occasion se présente, à vérifier que cela ne présente pas d'ambiguïté. Par exemple, dans le paragraphe suivant, nous définissons la somme de deux cardinalités. Lorsque ces deux cardinalités sont finies, notre définition coïncide avec celle de la somme de deux entiers naturels.

1.4 Somme de cardinalités

Étant donnés deux ensembles finis A et B disjoints, un résultat bien connu nous dit que

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$$

Comment étendre ce résultat aux cardinalités ? Nous allons *définir* la somme $\kappa + \lambda$ des deux cardinalités $\kappa = |A|$ et $\lambda = |B|$, où A et B sont deux ensembles disjoints, comme étant la cardinalité de $A \cup B$. Pour cela, il nous faut d'abord vérifier que cette cardinalité ne dépend pas de A et de B, mais seulement de $|A|$ et de $|B|$. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2. *Soient A, B, A', B' des ensembles. On suppose $A \cap B = \emptyset$, $A' \cap B' = \emptyset$, $A \sim A'$ et $B \sim B'$. Alors*

$$|A \cup B| = |A' \cup B'|$$

Démonstration. Soient $f : A \longrightarrow A'$ et $g : B \longrightarrow B'$ deux bijections. Soit $h : A \cup B \longrightarrow A' \cup B'$ l'application définie pour tout $x \in A \cup B$ par

- $h(x) = f(x)$ si $x \in A$.
- $h(x) = g(x)$ si $x \in B$.

On vérifie facilement que h est une bijection. Ainsi, $A \cup B \sim A' \cup B'$ et donc $|A \cup B| = |A' \cup B'|$. □

Définition 3. Soient A et B deux ensembles. L'*union disjointe* de A et B est

$$A \oplus B = A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$$

L'union disjointe de A et B est donc la réunion de deux ensembles disjoints équipotents à A et B. Le choix de $A \times \{0\}$ et $B \times \{1\}$ est arbitraire, nous aurions pu prendre n'importe quels ensembles disjoints équipotents à A et B.

Nous pouvons maintenant définir la somme de deux cardinalités.

Définition 4. Soient κ et λ deux cardinalités. La *somme* de κ et λ est

$$\kappa + \lambda = |A \oplus B|$$

où A et B sont deux ensembles quelconques tels que $|A| = \kappa$ et $|B| = \lambda$.

Proposition 3. *Soient κ et λ deux cardinalités. Soient A et B deux ensembles disjoints de cardinaux respectifs κ et λ. On a $|A \cup B| = \kappa + \lambda$.*

Démonstration. Comme A et B sont disjoints, l'application $f : A \cup B \longrightarrow A \oplus B$ définie par $f(x) = (x, 0)$ si $x \in A$ et $f(x) = (x, 1)$ si $x \in B$ est une bijection. On a donc $|A \cup B| = |A \oplus B| = \kappa + \lambda$. □

Exercice. Montrer que l'addition des cardinalités est commutative et associative. Montrer que $|\mathbf{0}|$ est neutre pour l'addition.

Nous allons dans les deux prochains paragraphes définir le produit $\kappa \times \lambda$ et la puissance κ^λ de deux cardinalités.

1.5 Produit de deux cardinalités

Proposition 4. *Soient A, B, A', B' des ensembles. On suppose $A \sim A'$ et $B \sim B'$. Alors*

$$|A \times B| = |A' \times B'|$$

Démonstration. Soient $f : A \longrightarrow A'$ et $g : B \longrightarrow B'$ deux bijections. Soit $h : A \times B \longrightarrow A' \times B'$ l'application définie pour tout $(x, y) \in A \times B$ par

$$h(x, y) = (f(x), g(y))$$

On vérifie facilement que h est une bijection. $\square$

Définition 5. Soient λ et κ deux cardinalités. Le *produit* de κ et λ est

$$\kappa \times \lambda = |A \times B|$$

où A et B sont deux ensembles quelconques tels que $|A| = \kappa$ et $|B| = \lambda$.

La propriété précédente montre que cette définition a un sens, et en particulier qu'elle ne dépend pas des ensembles A et B mais seulement de leur cardinalité. Retenons donc que, par définition,

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

Exercice. Montrer que la multiplication des cardinalités est commutative et associative, ainsi que distributive par rapport à l'addition. Montrer que $|\mathbf{1}|$ est neutre pour la multiplication et $|\mathbf{0}|$ est absorbant pour la multiplication.

Remarque. Soient κ et λ deux cardinalités. Supposons que $\lambda = n \in \mathbb{N}$ est une cardinalité finie. Si A est un ensemble de cardinalité κ, et B est un ensemble fini de cardinal n, on vérifie facilement que

$$A \times B \sim ((A \oplus A) \oplus \ldots) \oplus A \text{ } (n \text{ fois})$$

Ainsi,

$$\kappa \times n = \kappa + \ldots + \kappa \text{ } (n \text{ fois})$$

1.6 Puissances de cardinalités

Rappelons que si A et B sont deux ensembles, B^A désigne l'ensemble des applications de A vers B.

Proposition 5. *Soient A, B, A', B' des ensembles. On suppose $A \sim A'$ et $B \sim B'$. Alors*

$$|B^A| = |B'^{A'}|$$

Démonstration. Soient $f : A \longrightarrow A'$ et $g : B \longrightarrow B'$ deux bijections. Soit $h : B^A \longrightarrow B'^{A'}$ l'application définie pour toute fonction $\varphi \in B^A$ par

$$h(\varphi) = g \circ \varphi \circ f^{-1}$$

On vérifie facilement que h est une bijection. $\square$

Définition 6. Soient κ et λ deux cardinalités. La κ^{e} *puissance* de λ est

$$\lambda^\kappa = |B^A|$$

où A et B sont deux ensembles quelconques tels que $|A| = \kappa$ et $|B| = \lambda$.

La propriété précédente montre que cette définition a un sens, et en particulier qu'elle ne dépend pas des ensembles A et B mais seulement de leur cardinalité. Retenons donc que, par définition,

$$|B^A| = |B|^{|A|}$$

Remarque. Si A est un ensemble fini de cardinal $\kappa = n \in \mathbb{N}$, alors on montre facilement que $B^A \sim B^n = B \times \ldots \times B$ (n fois). On a donc

$$\lambda^\kappa = |B| = |B^n| = |B|^n = \lambda^n$$

Ainsi, l'élévation à une puissance qui est une cardinalité finie ne présente pas d'ambiguïté.

Exercice. Montrer que pour toute cardinalité κ, on a $\kappa^0 = 1$ et $1^\kappa = 1$. Montrer aussi que si $\kappa \neq 0$, alors $0^\kappa = 0$.

1.7 L'exponentielle en base 2

Proposition 6. *Soit E un ensemble. On a $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$.*

Rappelons que $2 = |\mathbf{2}|$.

Démonstration. Considérons l'application $\chi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbf{2}^E$ définie comme suit. Pour toute partie A de E, $\chi_A : E \longrightarrow \{0, 1\}$ est ce que l'on appelle la *fonction caractéristique de* A. Elle est définie pour tout $x \in E$ par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon.

Montrons que χ est une bijection.

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Supposons que $\chi_A = \chi_B$. Soit $x \in A$. On a $\chi_A(x) = 1$, donc $\chi_B(x) = 1$, donc $x \in B$. Ainsi, $A \subseteq B$. De même, $B \subseteq A$ et donc $A = B$, d'où l'injectivité de χ.

Soit $f \in \mathbf{2}^E$. Soit $A = \{x \in E : f(x) = 1\}$. On a alors clairement $f = \chi_A$, d'où la surjectivité de χ.

Les ensembles $\mathcal{P}(E)$ et $\mathbf{2}^E$ sont donc équipotents. De là,

$$|\mathcal{P}(E)| = |\{0,1\}^E| = |\{0,1\}|^{|E|} = 2^{|E|}$$

□

2 Subpotence

2.1 Un ordre sur les cardinalités

Définition 7. Soient A et B deux ensembles. A est *subpotent* à B s'il existe une injection de A vers B. On note alors $A \preceq B$.

Remarque. Si A et B sont deux ensembles tels que A soit non vide, il existe une injection de A vers B si et seulement si il existe une surjection de B sur A. Nous aurions donc pu définir la subpotence au moyen de surjections.

Proposition 7. *Soient A, B, A', B' des ensembles. On suppose $A \preceq B$, $A \sim A'$ et $B \sim B'$. Alors $A' \preceq B'$.*

Démonstration. C'est évident. En composant des injections et des bijections, on obtient des injections. □

La relation de subpotence est ainsi compatible avec la relation d'équipotence. On peut donc définir une relation $\leq$ sur les cardinalités comme suit.

Définition 8. Soient $\kappa = |A|$ et $\lambda = |B|$ deux cardinalités. On pose $\kappa \leq \lambda$ lorsque $A \preceq B$.

Un dicton bien connu dit que la partie est plus petite que le tout. Qu'en est-il exactement ?

Proposition 8. *Soient A et B deux ensembles. On suppose que $A \subseteq B$. Alors, $|A| \leq |B|$.*

Démonstration. L'application $x \longmapsto x$ est une injection de A dans B, d'où le résultat. □

Remarque. Le dicton dit en réalité un peu plus. Il sous-entend que la partie qui n'est pas le tout est strictement plus petite que le tout. En cela, le dicton a tort. Par exemple, l'application $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(x) = x - 1$ est une bijection. Ainsi, $|\mathbb{N}^*| = |\mathbb{N}|$. Pourtant, $\mathbb{N}^*$ est une partie stricte de $\mathbb{N}$.

Proposition 9. *La relation $\leq$ est réflexive et transitive.*

Démonstration. Exercice. $\square$

La relation $\leq$ est-elle antisymétrique ? La réponse est oui, c'est l'objet de la section suivante.

2.2 Le théorème de Cantor-Bernstein

Le théorème de Cantor-Bernstein est un résultat profond. Nous y ferons appel de façon permanente dans tout l'article. Sa démonstration, quoique subtile, est élémentaire. Nous allons commencer par un cas particulier de ce théorème.

Lemme 10. *Soient A et B deux ensembles tels que $B \subseteq A$. On suppose qu'il existe une injection de A vers B. Alors il existe une bijection de A sur B.*

Démonstration. Soit f une injection de A vers B. Définissons une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de A en posant $C_0 = A \setminus B$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = f(C_n)$. Posons également

$$C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$$

Remarquons que $C_0 \cap B = \emptyset$ et pour tout $n \geq 1$, $C_n \subseteq B$.

Nous n'en aurons pas besoin dans la suite de la démonstration, mais les C_n sont disjoints deux à deux. En effet, soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$. Supposons qu'il existe $y \in C_m \cap C_n$. Il existe donc $x, x' \in A \setminus B$ tels que

$$y = f^m(x) = f^n(x')$$

Par l'injectivité de f, il vient facilement

$$x = f^{n-m}(x')$$

Ceci entraîne que $x \in B$, contradiction.

Définissons maintenant une application $h : A \longrightarrow B$ en posant, pour tout $x \in A$,

- $h(x) = f(x)$ si $x \in C$
- $h(x) = x$ si $x \notin C$.

L'application h arrive bien dans B. En effet, si $x \in C$, alors $h(x) = f(x) \in B$. Et si $x \notin C$, alors $x \notin C_0 = A \setminus B$, donc $x \in B$. Ainsi, $h(x) = x \in B$.

Montrons tout d'abord que h est injective. Soient $x, x' \in A$. Supposons $h(x) = h(x')$.

- Cas 1, $x \in C$ et $x' \in C$. On a alors $f(x) = f(x')$ donc $x = x'$ puisque f est injective.
- Cas 2, $x \notin C$ et $x' \notin C$. On a alors trivialement $x = x'$ par la définition de h.
- Cas 3, $x \in C$ et $x' \notin C$. Comme $x \in C$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in C_n$. On a alors $h(x) = f(x) \in C_{n+1} \subseteq C$ et donc $h(x) \in C$. Par ailleurs, $h(x') = x' \notin C$. Ce cas est donc impossible.
- Cas 4, $x \notin C$ et $x' \in C$. Ce cas est analogue au cas 3, il est impossible.

Montrons maintenant que h est surjective. Soit $y \in B$.

- Cas 1, $y \notin C$. Alors $h(y) = y$ et y a donc un antécédent par h, à savoir lui-même.
- Cas 2, $y \in C$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $y \in C_n$. Comme $y \in B$, $y \notin C_0 = A \setminus B$ et donc $n \geq 1$. Il existe donc $x \in C_{n-1}$ tel que $y = f(x) = h(x)$. y a donc un antécédent par h.

L'application h est donc une bijection de A sur B. $\square$

Exemple. Prenons $A = [0, 1]$ et $B = [0, 1[$. L'application

$$f : x \longmapsto \frac{x}{2}$$

est une injection de A vers B. On a

$$C_0 = \{1\}$$

$$C_1 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

et par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$$

Ainsi,

$$C = \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

La bijection $h : A \longrightarrow B$ est donc définie par $h(x) = \frac{x}{2}$ si $x \in C$ et $h(x) = x$ sinon. Voici le graphe de h. Les points rouges n'appartiennent *pas* au graphe.

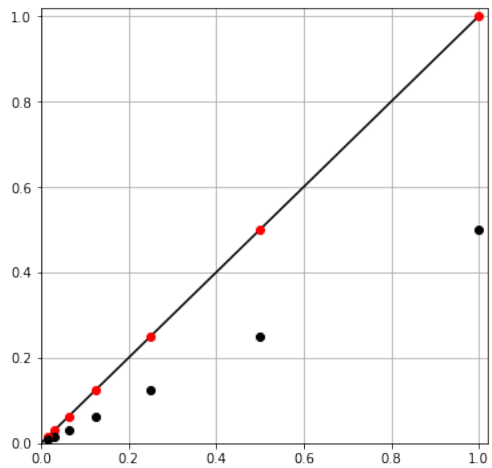

FIGURE 1 – Une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1[$

Passons au théorème de Cantor-Bernstein proprement dit.

Proposition 11. [Théorème de Cantor-Bernstein]

Soient κ et λ deux cardinalités. On suppose $\kappa \leq \lambda$ et $\lambda \leq \kappa$. Alors, $\kappa = \lambda$.

Démonstration. Soient A et B deux ensembles tels que $\kappa = |A|$ et $\lambda = |B|$. Soient $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow A$ deux injections. L'application $g \circ f$ est une injection de A dans $A' = g(B) \subseteq A$. Par le lemme, il existe une bijection $h : A \longrightarrow A'$.

Notons $\tilde{g} : B \longrightarrow A'$ la co-restriction de g à A', c'est à dire que pour tout $x \in B$, $\tilde{g}(x) = g(x)$. La fonction $\tilde{g}$ est une bijection de B sur A'.

L'application $\tilde{g}^{-1} \circ h$ est alors une bijection de A sur B. On a ainsi $\kappa = |A| = |B| = \lambda$. $\square$

2.3 Ordre total

La relation $\leq$ est donc une relation d'ordre sur les cardinalités. Il s'avère que c'est un ordre total.

Proposition 12. *Soient κ et λ deux cardinalités. Alors, $\kappa \leq \lambda$ ou $\lambda \leq \kappa$.*

La démonstration de ce résultat est subtile. Elle fait appel à un corollaire de l'axiome du choix appelé le *lemme de Zorn*, dont voici l'énoncé.

Proposition 13. [Lemme de Zorn]

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné non vide. On suppose que toute partie de E totalement ordonnée possède un majorant. Alors, E possède un élément maximal, c'est à dire qu'il existe $m \in E$ tel que pour tout $y \in E$,

$$m \leq y \implies m = y$$

Nous admettrons le lemme de Zorn. Montrons maintenant la totalité de la relation $\leq$ sur les cardinalités.

Démonstration. Soient E et F deux ensembles. Définissons

$$\mathcal{E} = \{(A, f) : A \subseteq E, f : A \longrightarrow F \text{ est injective}\}$$

Remarquons que $\mathcal{E}$ est non vide. En effet, le couple $(\emptyset, f)$ où $f : \emptyset \longrightarrow F$ est l'application triviale appartient à $\mathcal{E}$.

Considérons la relation $\preceq$, définie sur l'ensemble $\mathcal{E}$, par $(A, f) \preceq (B, g)$ si et seulement si $A \subseteq B$ et $g|_A = f$. Cette relation est clairement une relation d'ordre.

Considérons une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ totalement ordonnée. Posons

$$B = \bigcup_{(A,f) \in \mathcal{F}} A$$

Soit $g : B \longrightarrow F$ définie comme suit. Pour tout $x \in B$, il existe $(A, f) \in \mathcal{F}$ tel que $x \in A$. On pose alors $g(x) = f(x)$.

Tout d'abord, cette définition a bien un sens. En effet, soient (A, f) et (A', f') deux éléments de $\mathcal{F}$ tels que $x \in A$ et $x \in A'$. Comme $\mathcal{F}$ est totalement ordonnée, on a par exemple $(A, f) \preceq (A', f')$. De là, $A \subseteq A'$ et $f(x) = f'|_A(x) = f'(x)$.

Montrons que $(B, g) \in \mathcal{E}$. Tout d'abord, B, réunion de parties de E, est aussi une partie de E. Il reste à voir que g est injective. Soient $x, x' \in B$. Supposons $g(x) = g(x')$. Dit autrement, $f(x) = f'(x')$, où (A, f) et (A', f') sont deux éléments de $\mathcal{F}$. Comme $\mathcal{F}$ est totalement ordonné, on a, par exemple, $A \subseteq A'$ et $f'|_A = f$. Ainsi, $f(x) = f'(x)$, et donc $f'(x) = f'(x')$. Comme f' est injective, on en déduit $x = x'$.

On montre facilement que pour tout $(A, f) \in \mathcal{F}$, $(A, f) \preceq (B, g)$. Ainsi, (B, g) est un majorant de $\mathcal{F}$ pour la relation $\preceq$.

Nous avons donc montré que toute partie de $\mathcal{E}$ totalement ordonnée possède un majorant. Par le lemme de Zorn, l'ensemble $\mathcal{E}$ possède un élément maximal. Plus explicitement, il existe $(B, g) \in \mathcal{E}$ tel que pour tout $(A, f) \in \mathcal{E}$,

$$(B, g) \preceq (A, f) \implies (B, g) = (A, f)$$

Deux cas se présentent.

- Si g est surjective, on vient de trouver une surjection d'une partie de E sur F. Cette surjection possède un inverse à droite, qui est une injection de F dans E. Ainsi, $|F| \leq |E|$.
- Si g n'est pas surjective, soit $y \in F$ n'ayant pas d'antécédent par g. Supposons un court instant que $B \neq E$. Soit $x \in E \setminus B$. Définissons un prolongement g' de g à $B' = B \cup \{x\}$ en posant $g'(x) = y$. La fonction g' est une injection de E dans F, et on a $(B, g) \preceq (B', g')$. Pourtant, $(B, g) \neq (B', g')$, ce qui contredit la maximalité de (B, g). Ainsi, $B = E$ et donc g est une injection de E dans F, ce qui prouve que $|E| \leq |F|$.

□

Deux cardinalités quelconques κ et λ sont donc toujours comparables par la relation $\leq$.

2.4 Compatibilité des opérations avec l'ordre

Terminons cette section sur la subpotence en remarquant que la relation $\leq$ sur les cardinalités est compatible avec l'addition, la multiplication et les puissances.

Dans les quatre propositions qui suivent, κ, λ et μ sont trois cardinalités telles que $\lambda \leq \mu$. Dans les démonstrations, on se donne trois ensembles A, B, C de cardinalités respectives κ, λ et μ, ainsi qu'une injection $f : B \longrightarrow C$.

Proposition 14. $\kappa + \lambda \leq \kappa + \mu$.

Démonstration. L'application $h : A \oplus B \longrightarrow A \oplus C$ définie par

- $h(x, 0) = (x, 0)$ si $x \in A$.

- $h(x,1) = (f(x),1)$ si $x \in B$.

est une injection. Ainsi, $A \oplus B \preceq A \oplus C$. $\square$

Proposition 15. $\kappa \times \lambda \leq \kappa \times \mu$.

Démonstration. L'application $h : A \times B \longrightarrow A \times C$ définie par

$$h(a,b) = (a, f(b))$$

est une injection. Ainsi, $A \times B \preceq A \times C$. $\square$

Proposition 16. $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$.

Démonstration. Supposons d'abord $B \neq \emptyset$. Soit b un élément de B. Considérons l'application $h : A^B \longrightarrow A^C$ définie comme suit. Pour toute fonction $\varphi : B \longrightarrow A$ et tout $y \in C$,

- Si y a un (unique) antécédent $x \in B$ par f, $h(\varphi)(y) = \varphi(x)$.
- Sinon, $h(\varphi)(y) = b$.

Montrons que h est injective. Soient $\varphi, \varphi' \in B^A$. Supposons que $h(\varphi) = h(\varphi')$. Soit $x \in B$. Considérons $y = f(x)$. On a $h(\varphi)(y) = \varphi(x)$ et $h(\varphi')(y) = \varphi'(x)$. Comme $h(\varphi) = h(\varphi')$, il en résulte que $\varphi(x) = \varphi'(x)$. Ainsi, $\varphi = \varphi'$. On a donc $A^B \preceq A^C$.

Regardons maintenant ce qui se passe si $B = \emptyset$, c'est à dire si $\lambda = 0$. Si $\kappa \neq 0$, alors $\lambda^\kappa = 0$. On a donc bien $\lambda^\kappa \leq \mu^\kappa$. Si, au contraire, $\kappa = 0$, alors $\lambda^\kappa = 1 = \mu^\kappa$ et on a encore l'inégalité. $\square$

Proposition 17. $\lambda^\kappa \leq \mu^\kappa$.

Démonstration. Considérons l'application $h : B^A \longrightarrow C^A$ définie pour toute application $\varphi : A \longrightarrow B$ par

$$h(\varphi) = f \circ \varphi$$

Montrons que h est injective. Soient $\varphi, \varphi' : A \longrightarrow B$. Supposons que $h(\varphi) = h(\varphi')$, c'est à dire $f \circ \varphi = f \circ \varphi'$. Soit $x \in A$. On a $f(\varphi(x)) = f(\varphi'(x))$ d'où, par l'injectivité de f, $\varphi(x) = \varphi'(x)$. Ainsi, $\varphi = \varphi'$. Nous avons donc $B^A \preceq C^A$. $\square$

3 Ensembles dénombrables

Intéressons-nous maintenant à une cardinalité dont nous allons montrer qu'elle est la plus petite cardinalité infinie : celle des ensembles dénombrables.

3.1 Dénombrabilité

Définition 9. Un ensemble E est *dénombrable* lorsque $E \sim \mathbb{N}$.

Notation. Nous noterons $\omega = |\mathbb{N}|$.

3.2 Minimalité du dénombrable

Proposition 18. *Tout ensemble infini contient un sous-ensemble dénombrable.*

Démonstration. Soit E un ensemble infini. Définissons par récurrence forte une fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$ de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ est un élément de

$$E_n = E \setminus \{f(0), \ldots, f(n-1)\}$$

La fonction f est bien définie parce que, E étant infini, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble E_n est infini et donc pas vide. Par construction même, f est injective. L'ensemble $A = f(\mathbb{N})$, en bijection avec $\mathbb{N}$, est une partie dénombrable de E. □

Corollaire 19. *Soit κ une cardinalité infinie. Alors, $\omega \leq \kappa$.*

Démonstration. Soit E un ensemble de cardinalité κ. L'ensemble E est donc infini. Soit $A \subseteq E$ une partie dénombrable de E. On a

$$\omega = |A| \leq |E| = \kappa$$

□

Ainsi, ω est la plus petite des cardinalités infinies.

Corollaire 20. *Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est fini ou dénombrable.*

Démonstration. Soit A une partie infinie de l'ensemble dénombrable E. Comme A est infini, on a $\omega \leq |A|$. Par ailleurs, $A \subseteq E$, donc $|A| \leq |E| = \omega$. On conclut avec le théorème de Cantor-Bernstein que $|A| = \omega$. □

Passons maintenant en revue quelques exemples fondamentaux d'ensembles dénombrables. Commençons par l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

3.3 Les entiers relatifs

Proposition 21. *$\mathbb{Z}$ est dénombrable.*

Démonstration. Considérons la fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{n}{2} && \text{si } n \text{ est pair} \\ f(n) &= -\frac{n-1}{2} - 1 && \text{sinon} \end{aligned}$$

Soit $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par

$$\begin{aligned} g(n) &= 2n && \text{si } n \geq 0 \\ g(n) &= -2(n+1)+1 && \text{sinon} \end{aligned}$$

On vérifie aisément que f est bijective et que $f^{-1} = g$. $\square$

Voici les graphes de f et g. Les traits ne font pas partie des graphes, seuls les points comptent.

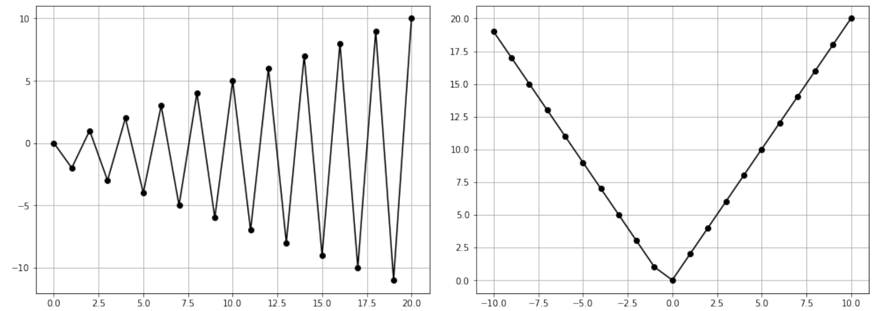

Figure 2 – Une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$ et sa réciproque

On en déduit facilement le résultat suivant.

Proposition 22. $\omega + \omega = \omega$.

Démonstration. L'application $n \longmapsto -n-1$ est une bijection de $\mathbb{Z}_-^*$ sur $\mathbb{N}$. Ainsi, $|\mathbb{Z}_-^*| = \omega$. De là, comme $\mathbb{Z}_-^*$ et $\mathbb{N}$ sont disjoints,

$$\omega = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}_-^* \cup \mathbb{N}| = |\mathbb{Z}_-^*| + |\mathbb{N}| = \omega + \omega$$

$\square$

Passons maintenant à l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers naturels.

3.4 L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Proposition 23. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *est dénombrable.*

Démonstration. Considérons l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(a,b) = 2^a 3^b$. Cette application est injective. Ainsi, $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}|$.

Considérons maintenant l'application $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $g(n) = (n, 0)$. Cette application est injective. Ainsi, $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

Par le théorème de Cantor-Bernstein, $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. $\square$

Corollaire 24. $\omega \times \omega = \omega$.

Démonstration. $\omega \times \omega = |\mathbb{N}| \times |\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| = \omega$. $\square$

Corollaire 25. *Pour tout entier $p \geq 1$, $\omega^p = \omega$.*

Démonstration. C'est une récurrence immédiate sur p. $\square$

Il est en fait possible de construire une bijection explicite de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. C'est ce que nous allons maintenant examiner.

Définissons tout d'abord la fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ par

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

La fonction φ est strictement croissante. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) = n + 1$$

Soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$f(x, y) = \varphi(x + y) + y$$

Voici les images par f de quelques éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Le lecteur est invité à longuement méditer sur ce dessin et sur sa signification.

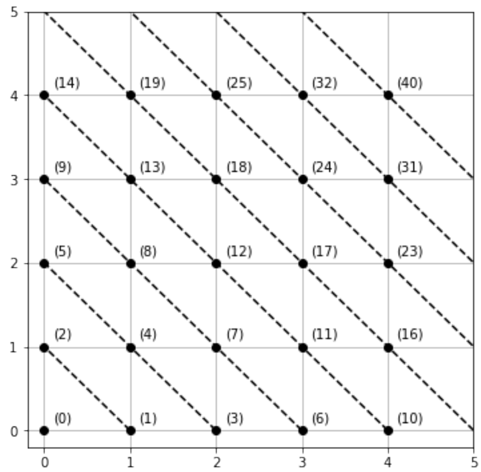

FIGURE 3 – Une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$

Montrons que f est bijective. Soient $x, y, x', y' \in \mathbb{N}$. Supposons que $f(x, y) = f(x', y')$. On a donc, en posant $n = x + y$ et $n' = x' + y'$,

$$\varphi(n) + y = \varphi(n') + y'$$

Supposons $n \neq n'$. Par exemple, $n < n'$. On a alors

$$y - y' = \varphi(n') - \varphi(n) \geq n' > n = x + y$$

Ainsi, $-y' > x$, ce qui est absurde puisque $x, y' \in \mathbb{N}$. Ainsi, $n = n'$. De là, $y = y'$ puis $x = x'$. La fonction f est donc injective.

Soit $m \in \mathbb{N}$. Il existe un entier naturel n (unique) tel que

$$\varphi(n) \leq m < \varphi(n+1)$$

Posons $y = m - \varphi(n)$ et $x = n - y = n - m + \varphi(n)$. De la première inégalité, il vient $y \in \mathbb{N}$. La deuxième inégalité nous dit que

$$m < \varphi(n) + n + 1 = x + m + 1$$

Ainsi, $x + 1 > 0$ et donc $x \in \mathbb{N}$. Il reste à remarquer que

$$m = \varphi(n) + y = \varphi(x + y) + y = f(x, y)$$

La fonction f est donc surjective.

3.5 Les nombres rationnels

Proposition 26. *$\mathbb{Q}$ est dénombrable.*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ définie comme suit. Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, x s'écrit de façon unique $x = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, et $p \wedge q = 1$. Posons $f(x) = (p, q)$. Par l'unicité de l'écriture des rationnels sous forme irréductible, la fonction f est injective. On a donc

$$|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| \times |\mathbb{N}| = \omega^2 = \omega$$

Par ailleurs, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est infini, donc

$$\omega \leq |\mathbb{Q}|$$

Ainsi, par le théorème de Cantor-Bernstein, $|\mathbb{Q}| = \omega$. $\square$

3.6 Réunions d'ensembles dénombrables

Proposition 27. *Toute réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.*

Démonstration. Quitte à compléter par des ensembles vides, nous pouvons nous concentrer sur des réunions dénombrables. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles finis ou dénombrables. Soit

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$$

Les ensembles B_n sont finis ou dénombrables, car inclus dans A_n. De plus, les B_n sont disjoints, et

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = A$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : B_n \longrightarrow \mathbb{N}$ une injection. Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie pour tout $x \in A$ par

$$f(x) = (n, f_n(x))$$

où n est l'unique entier naturel tel que $x \in B_n$.

La fonction f est injective. En effet, soient $x, x' \in A$. Soient m et n les entiers (uniques) tels que $x \in B_m$ et $x' \in B_n$. Supposons $f(x) = f(x')$. On a donc $(m, f_m(x)) = (n, f_n(x'))$. De là, $m = n$, et donc $f_m(x) = f_m(x')$. Comme f_m est injective, $x = x'$.

On a donc $A \sim f(A) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Si A est infini, $f(A)$ l'est aussi. Comme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, $f(A)$ est dénombrable et donc A aussi. $\square$

3.7 Les nombres algébriques

Définition 10. Soit $x \in \mathbb{C}$. Le nombre complexe x est *algébrique* s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(x) = 0$.

Proposition 28. $|\mathbb{Q}[X]| = \omega$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $\mathbb{Q}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{Q}_n[X]$ définie par

$$(a_0, \ldots, a_n) \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

est une bijection. On a donc

$$|\mathbb{Q}_n[X]| = |\mathbb{Q}^{n+1}| = |\mathbb{Q}|^{n+1} = \omega^{n+1} = \omega$$

Remarquons maintenant que

$$\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$$

L'ensemble $\mathbb{Q}[X]$, réunion dénombrable des ensembles dénombrables $\mathbb{Q}_n[X]$, est donc lui aussi dénombrable. $\square$

Proposition 29. *L'ensemble $\mathbb{A}$ des nombres algébriques est dénombrable.*

Démonstration. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$, notons $R(P)$ l'ensemble des racines de P. L'ensemble $R(P)$ est fini, de cardinal inférieur ou égal au degré de P. On a

$$\mathbb{A} = \bigcup_{P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}} R(P)$$

L'ensemble $\mathbb{A}$, réunion dénombrable d'ensembles finis, est donc fini ou dénombrable. Comme $\mathbb{A}$ est clairement un ensemble infini (par exemple parce que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}$), on a $|\mathbb{A}| = \omega$. $\square$

Existe-t-il des cardinalités infinies différentes de ω ? La section suivante répond à la question.

4 Le théorème de Cantor

Définition 11. Si κ et λ sont deux cardinalités, nous noterons $\kappa < \lambda$ lorsque $\kappa \leq \lambda$ et $\kappa \neq \lambda$.

Remarquons que, par le théorème de Cantor-Bernstein, $\kappa < \lambda$ si et seulement si $\kappa \leq \lambda$ et $\lambda \not\leq \kappa$

Proposition 30. [Théorème de Cantor]

Pour tout ensemble A, $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Démonstration. Soit A un ensemble. L'application $x \longmapsto \{x\}$ est une injection de A dans $\mathcal{P}(A)$, donc $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$.

Supposons qu'il existe une bijection $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$. Considérons l'ensemble

$$E = \{x \in A : x \notin f(x)\}$$

Pour tout $x \in A$, on a

$$(\star)\ x \in E \iff x \notin f(x)$$

On a $E \in \mathcal{P}(A)$. Par la surjectivité de f, il existe $e \in A$ tel que $E = f(e)$. On a alors, par $(\star)$,

$$e \in E \iff e \notin f(e)$$

ou encore

$$e \in E \iff e \notin E$$

Contradiction. $\square$

Corollaire 31. *Pour toute cardinalité κ, on a $\kappa < 2^\kappa$.*

Démonstration. Soit A un ensemble de cardinalité κ. On a

$$\kappa = |A| < |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^\kappa$$

$\square$

En conclusion, il existe bien des cardinalités infinies strictement supérieures à ω. Mieux que cela, par le corollaire ci-dessus, il n'existe aucune cardinalité plus grande que toutes les autres. Dans la section suivante, nous nous intéressons à une cardinalité dont nous montrerons qu'elle est strictement supérieure à ω : celle (entre autres) de l'ensemble des nombres réels.

5 Les nombres réels

5.1 Équipotence des intervalles de $\mathbb{R}$

Proposition 32. *Tous les intervalles de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points sont équipotents à $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points. On a $I \subseteq \mathbb{R}$ et donc $|I| \leq |\mathbb{R}|$.

Remarquons maintenant que l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$ définie par

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x$$

est une bijection. Voici son graphe.

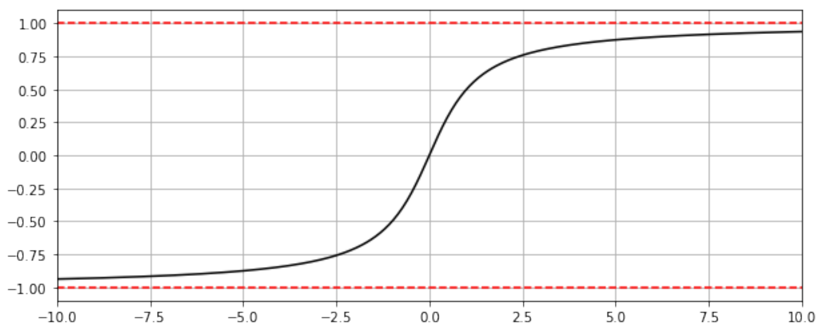

FIGURE 4 – Une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$

Soient a et b deux points distincts de I tels que $a < b$. On construit facilement une bijection $\psi :]-1, 1[\longrightarrow]a, b[$, par exemple la fonction affine définie par

$$\psi(t) = \frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}$$

L'application $\psi \circ \varphi$ est alors une injection de $\mathbb{R}$ dans I, donc $|\mathbb{R}| \leq |I|$.

Par le théorème de Cantor-Bernstein, $|I| = |\mathbb{R}|$. $\square$

Notation. Nous noterons $\mathfrak{c}$ la cardinalité de $\mathbb{R}$. $\mathfrak{c}$ est appelée *la puissance du continu*. Nous allons bientôt voir que $\omega < \mathfrak{c}$.

Remarquons que le fait que tous les intervalles de $\mathbb{R}$ non triviaux sont équipotents à $\mathbb{R}$, et on donc pour cardinalité $\mathfrak{c}$ entraîne une conséquence intéressante de $\mathfrak{c}$.

Proposition 33. $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Démonstration. Soient $A = [0, 1[$ et $B = [1, 2]$. Les ensembles A et B sont des intervalles disjoints, et leur réunion est $A \cup B = [0, 2]$. On a donc

$$\mathfrak{c} = |[0, 2]| = |A \cup B| = |A| + |B| = \mathfrak{c} + \mathfrak{c}$$

□

5.2 L'ensemble triadique de Cantor

Définition 12. L'*ensemble triadique de Cantor* est l'ensemble $\mathcal{C}$ des réels de $[0, 1]$ dont le développement triadique (i.e. en base 3) ne contient que des 0 et des 2.

Remarque. Il existe des réels de l'intervalle $[0, 1]$ qui possèdent deux développements triadiques. Ce sont précisément les réels de la forme $\frac{m}{3^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $0 < m < 3^n$. Pour un tel réel, nous devrions être plus précis et dire qu'il appartient à $\mathcal{C}$ lorsque l'un de ses deux développements triadiques ne contient que des 0 et des 2.

Pour se faire une image de l'ensemble $\mathcal{C}$, notons qu'il est possible de construire l'ensemble de Cantor « par le haut » de la façon suivante. On part de l'ensemble

$$\mathcal{C}_0 = [0, 1]$$

On enlève à $\mathcal{C}_0$ les réels dont le premier chiffre du développement triadique est un 1, c'est à dire le tiers du milieu $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$. On appelle l'ensemble obtenu $\mathcal{C}_1$. On a ainsi

$$\mathcal{C}_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Pour tout $n \geq 1$, ayant construit l'ensemble $\mathcal{C}_{n-1}$, on appelle $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des réels de $\mathcal{C}_{n-1}$ dont le n^{e} chiffre du développement triadique est un 1. Ceci revient à ôter de $\mathcal{C}_{n-1}$, qui est une réunion finie de segments, les tiers ouvert du milieu de ces segments. On vérifie facilement que $\mathcal{C}_n$ est la réunion de 2^n segments, chacun de longueur $\frac{1}{3^n}$. Les ensembles $\mathcal{C}_n$ forment une suite décroissante au sens de l'inclusion, et on a

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$$

Voici une illustration des ensembles $\mathcal{C}_n$ pour $0 \leq n \leq 5$.

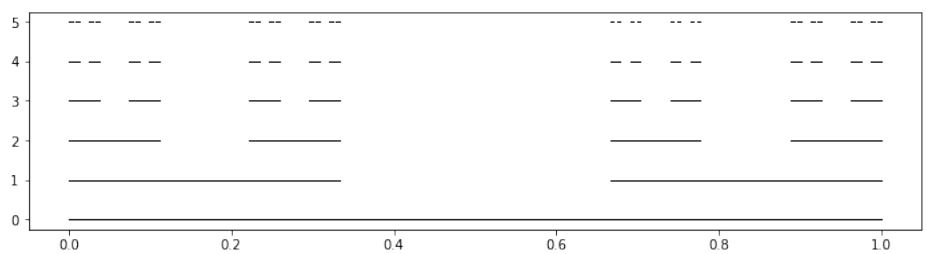

FIGURE 5 – Approximations de l'ensemble de Cantor

À première vue, l'ensemble $\mathcal{C}$ est un « très petit » ensemble.

Proposition 34. *L'ensemble $\mathcal{C}$ est de mesure nulle.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{C}_n$ est la réunion de 2^n intervalles de longueur $\frac{1}{3^n}$. Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{C}_n$ est mesurable, et que sa mesure est

$$\mu(\mathcal{C}_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

L'ensemble $\mathcal{C}$, intersection dénombrable des C_n qui sont mesurables, est donc lui aussi mesurable. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(\mathcal{C}) \leq \mu(\mathcal{C}_n)$. Ainsi, en faisant tendre n vers l'infini,

$$\mu(\mathcal{C}) = 0$$

□

Cela dit, bien que $\mathcal{C}$ soit de mesure nulle, cet ensemble contient autant d'éléments que l'ensemble $\mathbb{R}$.

Proposition 35. $|\mathcal{C}| = \mathfrak{c}$.

Démonstration. Soit $f : \mathcal{C} \longrightarrow [0,1]$ définie comme suit. Pour tout $x \in \mathcal{C}$ de développement triadique

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$$

où les a_k valent 0 ou 2,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}$$

où $b_k = \frac{1}{2}a_k$.

L'application f est surjective. En effet, soit $y \in [0,1]$. Le réel y possède un développement binaire

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}$$

où b_k vaut 0 ou 1. En posant pour tout $k \geq 1$, $a_k = 2b_k \in \{0,2\}$, on a $y = f(x)$ où

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \in \mathcal{C}$$

Nous avons donc montré que $|\mathcal{C}| \geq |[0,1]| = |\mathbb{R}|$. Inversement, $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}$ et donc $|\mathcal{C}| \leq |\mathbb{R}|$. On conclut avec le théorème de Cantor-Bernstein. □

Remarque. L'application f que nous avons définie dans la démonstration ci-dessus n'est pas une injection. Par exemple, nous avons en base 2,

$$\frac{1}{2} = 0.1000\ldots = 0.0111\ldots$$

et donc, en base 3 cette fois-ci,

$$\frac{1}{2} = f(0.2000\ldots) = f(0.0222\ldots)$$

On a

$$0.2000\ldots = \frac{2}{3}$$

et

$$\begin{aligned} 0.0222\ldots &= 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{3^k} \\ &= \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k} \\ &= \frac{2}{9}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, $f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right)$.

Ne perdons pas de vue notre objectif, qui est d'apprendre des choses sur la cardinalité $\mathfrak{c}$. Il s'avère que l'ensemble de Cantor est équipotent à un ensemble que nous connaissons déjà très bien.

Proposition 36. $\mathcal{C} \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration. Considérons l'application $\varphi : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{C}$ définie comme suit. Pour toute application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{2}$,

$$\varphi(f) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2f(k)}{3^{k+1}}$$

On vérifie facilement que l'application φ est une bijection. On a donc

$$2^{\omega} = |\mathbf{2}^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{C}|$$

□

Corollaire 37. $\mathfrak{c} = 2^{\omega}$.

Démonstration. C'est immédiat, par les deux propositions qui précèdent. □

Corollaire 38. $\omega < \mathfrak{c}$.

Démonstration. Par le théorème de Cantor, $\omega < 2^{\omega}$. Or, $2^{\omega} = \mathfrak{c}$. □

5.3 Une somme et deux produits particuliers

Proposition 39. $\omega + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Démonstration. On a

$$\mathfrak{c} = 0 + \mathfrak{c} \leq \omega + \mathfrak{c} \leq \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

On conclut avec le théorème de Cantor-Bernstein. □

Proposition 40. $\mathfrak{c} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Démonstration. Soit $f : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ définit comme suit. Pour toutes suites u et v à valeurs dans $\{0, 1\}$, définissons $w = f(u, v)$ par

- $w_{2n} = u_n$.
- $w_{2n+1} = v_n$.

L'application f est clairement une bijection. Sa réciproque est la fonction $g : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ définie, pour toute suite w à valeurs dans $\{0, 1\}$, par $g(w) = (u, v)$ où $u = (w_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

On a donc

$$\mathfrak{c} = |\mathbf{2}^{\mathbb{N}}| = |\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}| = |\mathbf{2}^{\mathbb{N}}| \times |\mathbf{2}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c} \times \mathfrak{c}$$

□

Proposition 41. $\omega \times \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Démonstration. Une première preuve consiste à remarquer que

$$\mathfrak{c} = 1 \times \mathfrak{c} \leq \omega \times \mathfrak{c} \leq \mathfrak{c} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

et à conclure par le théorème de Cantor-Bernstein. Remarquons que l'on peut aussi déterminer une bijection explicite de $\mathbb{Z} \times [0, 1[$ sur $\mathbb{R}$.

Considérons la fonction $f : \mathbb{Z} \times [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in [0, 1[$,

$$f(n, x) = n + x$$

La fonction f est bijective. Sa réciproque est la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z} \times [0, 1[$ définie pour tout réel x par

$$g(x) = (\lfloor x \rfloor, x - \lfloor x \rfloor)$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x. On en déduit que

$$\omega \times \mathfrak{c} = |\mathbb{Z} \times [0, 1[| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$$

□

5.4 $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie

Proposition 42. $|\mathbb{C}| = \mathfrak{c}$.

Démonstration. En effet, $\mathbb{C} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donc

$$|\mathbb{C}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = \mathfrak{c} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

$\square$

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Corollaire 43. *Pour tout entier $n \geq 1$, $|\mathbb{R}^n| = \mathfrak{c}$.*

Démonstration. C'est une récurrence facile sur n. $\square$

Corollaire 44. *Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Alors, $|E| = \mathfrak{c}$.*

Démonstration. Il existe un isomorphisme linéaire, donc une bijection, de E sur $\mathbb{R}^n$, d'où le résultat. $\square$

5.5 Nombres transcendants

Un nombre complexe est *transcendant* lorsqu'il n'est pas algébrique. Notons $\mathbb{T}$ l'ensemble des nombres transcendants.

Commençons par un résultat sur les sommes faisant intervenir ω.

Lemme 45. *Pour toute cardinalité κ,*

- *Si κ est finie, alors $\omega + \kappa = \omega$.*
- *Si κ est infinie, alors $\omega + \kappa = \kappa$.*

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\omega = \omega + 0 \leq \omega + n \leq \omega + \omega = \omega$$

  et donc $\omega + n = \omega$ par le théorème de Cantor-Bernstein.
- Soit A un ensemble infini de cardinalité κ. Soit $B \subseteq A$ un ensemble dénombrable. Soit C un ensemble dénombrable tel que $A \cap C = \emptyset$ (et donc $B \cap C = \emptyset$). On a $|C \cup B| = \omega + \omega = \omega$. Il existe donc une bijection $f : C \cup B \longrightarrow B$. Soit $g : C \cup A \longrightarrow A$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x \in C \cup B$ et $g(x) = x$ sinon. La fonction g est clairement une bijection. Ainsi,

$$\omega + \kappa = |C \cup A| = |A| = \kappa$$

$\square$

Proposition 46. $|\mathbb{T}| = \mathfrak{c}$.

Démonstration. Rappelons que $\mathbb{A}$ est l'ensemble des nombres algébriques. On a $\mathbb{A} \cap \mathbb{T} = \emptyset$ et $\mathbb{A} \cup \mathbb{T} = \mathbb{C}$. Ainsi,

$$|\mathbb{A}| + |\mathbb{T}| = |\mathbb{C}|$$

ou encore

$$\omega + |\mathbb{T}| = \mathfrak{c}$$

Comme $c \neq \omega$, l'ensemble $\mathbb{T}$ est donc infini. De là, par le lemme précédent,

$$\omega + |\mathbb{T}| = |\mathbb{T}|$$

d'où le résultat. □

Ainsi, la plupart des nombres complexes (ou des nombres réels) sont transcendants.

6 Ensembles de fonctions

Nous avons pour l'instant peu parlé de puissances de cardinalités. Il est temps d'en dire quelques mots, ce qui va nous amener à étudier la cardinalité de quelques ensembles de fonctions.

6.1 Propriétés des puissances

Proposition 47. *Pour toutes cardinalités κ, λ et μ, on a*

$$\kappa^\lambda \times \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$$

Démonstration. Soient A, B, C trois ensembles tels que $|A| = \lambda$, $|B| = \mu$ et $|C| = \kappa$. Supposons de plus A et B disjoints. Considérons la fonction

$$\varphi : C^{A\cup B} \longrightarrow C^A \times C^B$$

définie comme suit. Pour toute application $f : A \cup B \longrightarrow C$, $\varphi(f) = (f|_A, f|_B)$. On vérifie facilement que φ est une bijection. La réciproque de φ est la fonction

$$\psi : C^A \times C^B \longrightarrow C^{A\cup B}$$

définie comme suit. Pour toutes applications $f : A \longrightarrow C$ et $g : B \longrightarrow C$, $\psi(f, g)$ est l'application de $A \cup B$ vers C définie par

- $\psi(f, g)(x) = f(x)$ si $x \in A$.
- $\psi(f, g)(x) = g(x)$ si $x \in B$.

□

Proposition 48. *Pour toutes cardinalités κ, λ et μ, on a*

$$\left(\kappa^{\lambda}\right)^{\mu} = \kappa^{\lambda \times \mu}$$

Démonstration. Soient A, B, C trois ensembles tels que $|A| = \lambda$, $|B| = \mu$ et $|C| = \kappa$. Considérons l'application

$$\varphi : C^{A \times B} \longrightarrow \left(C^{A}\right)^{B}$$

définie comme suit. Pour toute application $f : A \times B \longrightarrow C$, pour tout $x \in A$, pour tout $y \in B$,

$$\varphi(f)(y)(x) = f(x, y)$$

On vérifie facilement que φ est surjective. Sa réciproque est l'application

$$\psi : \left(C^{A}\right)^{B} \longrightarrow C^{A \times B}$$

définie comme suit. Pour toute application $f : B \longrightarrow C^{A}$, pour tout $x \in A$, pour tout $y \in B$,

$$\psi(f)(x, y) = f(y)(x)$$

□

Proposition 49. *Pour toutes cardinalités κ, λ et μ, on a*

$$(\kappa \ \times \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} \times \lambda^{\mu}$$

Démonstration. Soient A, B et C trois ensembles de cardinalités respectives κ, λ et μ. Considérons l'application $\varphi : (A \times B)^{C} \longrightarrow A^{C} \times B^{C}$ définie comme suit. Pour toute fonction $f : C \longrightarrow A \times B)$, on a pour tout $x \in C$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ où $f_1 : C \longrightarrow A$ et $f_2 : C \longrightarrow A$. On pose $\varphi(f) = (f_1, f_2)$. L'application φ est une bijection. Sa réciproque est la fonction $\psi : A^{C} \times B^{C} \longrightarrow (A \times B)^{C}$ définie comme suit. Pour toutes fonctions $f_1 : C \longrightarrow A$ et $f_2 : C \longrightarrow B$ et tout $x \in C$, $\psi(f_1, f_2)(x) = (f_1(x), f_2(x))$. □

6.2 Suites réelles

Le résultat ci-dessous montre qu'il n'y a pas plus de suites réelles que de nombres réels.

Proposition 50. $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$.

Démonstration. $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{N}|} = (2^{\omega})^{\omega} = 2^{\omega^2} = 2^{\omega} = \mathfrak{c}$. □

6.3 Polynômes

Proposition 51. $|\mathbb{R}[X]| = \mathfrak{c}$.

Démonstration. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie comme suit. Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit de façon unique

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels tous nuls sauf un nombre fini. Posons $f(P) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'application f est injective, donc

$$|\mathbb{R}[X]| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$$

Par ailleurs, l'ensemble $\mathbb{R}_0[X] \subseteq \mathbb{R}[X]$ des polynômes constants est équipotent à $\mathbb{R}$, donc

$$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}_0[X]| \leq |\mathbb{R}[X]|$$

On conclut avec le théorème de Cantor-Bernstein. □

6.4 Fonctions continues... ou pas

Peut-être encore plus surprenant, il n'y a pas plus de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ que de nombres réels.

Proposition 52. $|\mathcal{C}^0(\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$.

Démonstration. Considérons l'application $\varphi : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ définie, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, par $\varphi(f) = f|_{\mathbb{Q}}$. Montrons que φ est injective. Pour cela, donnons nous $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Supposons que $\varphi(f) = \varphi(g)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers x. La fonction f étant continue en x, $f(x_n)$ tend vers $f(x)$ lorsque n tend vers l'infini. De même, $g(x_n)$ tend vers $g(x)$ lorsque n tend vers l'infini. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = g(x_n)$. Par l'unicité de la limite, $f(x) = g(x)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $f = g$.

Nous venons donc de montrer que

$$|\mathcal{C}^0(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{Q}|} = (2^\omega)^\omega = 2^{\omega^2} = 2^\omega = \mathfrak{c}$$

Par ailleurs, l'application $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ qui à tout réel t associe la fonction constante égale à t est une injection. On a donc

$$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| \leq |\mathcal{C}^0(\mathbb{R})|$$

On conclut à l'aide du théorème de Cantor-Bernstein. □

Corollaire 53. *Pour tout* $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $|\mathcal{C}^n(\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$.

Démonstration. On a $\mathcal{C}^n(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, donc $|\mathcal{C}^n(\mathbb{R})| \leq \mathfrak{c}$. De plus, l'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ qui à tout réel t associe la fonction constante égale à t est injective, donc $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| \leq |\mathcal{C}^n(\mathbb{R})|$. On conclut avec le théorème de Cantor-Bernstein. □

En revanche, il y a beaucoup plus de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ que de nombres réels.

Proposition 54. $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Démonstration. $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{R}|} = (2^{\omega})^{\mathfrak{c}} = 2^{\omega \times \mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$. □

Remarquons que par le théorème de Cantor, $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| > |\mathbb{R}|$.

6.5 Résumé

Nous avons vu passer dans cet article des ensembles infinis couramment utilisés en mathématiques élémentaires dont les cardinalités étaient

$$\omega < \mathfrak{c} = 2^{\omega} < 2^{2^{\omega}} = 2^{\mathfrak{c}}$$

Histoire de résumer, voici quelques uns des ensembles en question, regroupés par cardinalités.

$$\begin{array}{rcl} \omega & = & |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}[X]| = |\mathbb{A}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \\ \mathfrak{c} & = & |\mathbb{R}| = |\mathbb{T}| = |\mathbb{C}| = |\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}[X]| = |\mathcal{C}^n(\mathbb{R})| \\ 2^{\mathfrak{c}} & = & |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| \end{array}$$

7 Compléments sur les opérations

Nous allons montrer dans cette section deux résultats remarquables qui nous disent qu'il est immédiat de calculer la somme et le produit de deux cardinalités. Ces résultats sont très simples. En revanche, leur démonstration est très compliquée. Nous dirons aussi un mot sur les puissances.

7.1 Addition

Voici un lemme facile.

Lemme 55. *Soient κ une cardinalité infinie et $n \in \mathbb{N}$. On a $\kappa + n = \kappa$.*

Démonstration. Nous avons vu dans le paragraphe sur les nombres transcendants que $\omega + \kappa = \kappa$. On a donc

$$\kappa \leq \kappa + n \leq \kappa + \omega = \kappa$$

On conclut avec le théorème de Cantor-Bernstein. □

Passons à plus difficile. La démonstration du résultat ci-dessous utilise le lemme de Zorn.

Proposition 56. *Soit κ une cardinalité infinie. Alors, $\kappa + \kappa = \kappa$.*

Démonstration. Soit E un ensemble de cardinalité κ.

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(A, f) : A \subseteq E, f : A \longrightarrow A \oplus A, f \text{ bijective}\}$$

Remarquons que l'ensemble $\mathcal{E}$ est non vide. Il contient en effet le couple $(\emptyset, f)$ où f est la bijection triviale $\emptyset \longrightarrow \emptyset \oplus \emptyset = \emptyset$.

Définissons sur $\mathcal{E}$ une relation d'ordre $\preceq$ comme suit. Si (A, f) et (B, g) sont deux éléments de $\mathcal{E}$, on a $f \preceq g$ lorsque $A \subseteq B$ et pour tout $x \in A$, $g(x) = f(x)$. La relation $\preceq$ est clairement une relation d'ordre.

Soit $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{E}$ totalement ordonnée. Soit

$$B = \bigcup_{(A,f)\in\mathcal{F}} A$$

Soit $g : B \longrightarrow B \oplus B$ définie pour tout $x \in B$ comme suit. Si $(A, f) \in \mathcal{F}$ et $x \in A$, alors $g(x) = f(x)$. Comme $\mathcal{F}$ est totalement ordonnée, il est facile de vérifier que la fonction g est bien définie. On vérifie également que g est bijective. Enfin, g majore $\mathcal{F}$.

Ainsi, toute partie totalement ordonnée de $\mathcal{E}$ possède un majorant. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{E}$ possède un élément maximal que nous noterons (A, f).

Nous allons montrer par l'absurde que $A \sim E$. Supposons donc $A \not\sim E$. L'ensemble $B = E \setminus A$ est nécessairement infini par le lemme précédent. Soit C une partie dénombrable de B. Soit $h : C \longrightarrow \mathbb{N}$ une bijection. Posons $A' = A \cup C$ et définissons une fonction $g : A' \longrightarrow A' \oplus A'$ comme suit. Pour tout $x \in A'$,

- Si $x \in A$, $g(x) = f(x)$.
- Si $x \in C$ et $h(x)$ est pair, $g(x) = (x, 0)$.
- Si $x \in C$ et $h(x)$ est impair, $g(x) = (x, 1)$.

On vérifie facilement que la fonction g est bijective. De plus, $(A, f) \preceq (A', g)$ et pourtant $(A, f) \neq (A', g)$ ce qui contredit la maximalité de (A, f).

Ainsi, $A \sim E$. On a alors

$$E \oplus E \sim A \oplus A \sim A \sim E$$

et donc $\kappa + \kappa = \kappa$. $\square$

Il est maintenant facile d'obtenir la somme de deux cardinalités dont l'une au moins est infinie.

Proposition 57. *Soient κ et λ deux cardinalités dont l'une au moins est infinie. Alors,*

$$\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$$

Démonstration. Supposons par exemple $\kappa \leq \lambda$ et λ infinie. On a

$$\lambda = 0 + \lambda \leq \kappa + \lambda \leq \lambda + \lambda = 2 \times \lambda \leq \lambda \times \lambda = \lambda$$

d'où le résultat par le théorème de Cantor-Bernetein. $\square$

7.2 Multiplication

Montrons d'abord un lemme.

Lemme 58. *Soit E un ensemble dénombrable. Soit $a \in E$. Il existe une bijection $g : E \longrightarrow E \times E$ telle que $g(a) = (a, a)$.*

Démonstration. Soit $h : E \longrightarrow \mathbb{N}$ une bijection telle que $h(a) = 0$. Soit $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une bijection telle que $\varphi(0, 0) = 0$. Par exemple, la bijection que nous avons étudiée pour prouver que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. Considérons la fonction $g : E \longrightarrow E \times E$ définie pour tout $x \in E$ comme suit. En posant $\varphi^{-1}(h(x)) = (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$g(x) = (h^{-1}(m), h^{-1}(n))$$

La fonction g est alors une bijection de E sur $E \times E$. Sa réciproque est la fonction $g' : E \times E \longrightarrow E$ définie comme suit. Pour tout $(x, y) \in E \times E$,

$$g'(x, y) = h^{-1}(\varphi(h(x), h(y)))$$

De plus,

$$\varphi^{-1}(h(a)) = \varphi^{-1}(0) = (0, 0)$$

et donc

$$g(a) = (h^{-1}(0), h^{-1}(0)) = (a, a)$$

$\square$

La preuve de la propriété ci-dessous est délicate. Elle utilise le lemme de Zorn.

Proposition 59. *Soit κ une cardinalité infinie. Alors, $\kappa \times \kappa = \kappa$.*

Démonstration.

Soit E un ensemble de cardinalité κ. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(A, f) : A \subseteq E, f : A \longrightarrow A \times A, f \text{ bijective}\}$$

Définissons sur $\mathcal{E}$ une relation $\preceq$ en posant pour tous éléments (A, f) et (B, g) de $\mathcal{E}$, $(A, f) \preceq (B, g)$ si et seulement si $A \subseteq B$ et pour tout $x \in A$, $g(x) = f(x)$. La relation $\preceq$ est clairement une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathcal{E}$. Remarquons aussi que $\mathcal{E}$ est non vide, car cet ensemble contient le couple $(\emptyset, f)$ où f est la bijection triviale $\emptyset \longrightarrow \emptyset \times \emptyset = \emptyset$.

Soit $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{E}$ totalement ordonnée. Soit

$$B = \bigcup_{(A,f) \in \mathcal{F}} A \subseteq E$$

Soit $g : B \longrightarrow B \times B$ définie pour tout $x \in B$ comme suit. Si $(A, f) \in \mathcal{F}$ et $x \in A$, alors $g(x) = f(x)$. Comme $\mathcal{F}$ est totalement ordonnée, il est facile de vérifier que la fonction g est bien définie. On vérifie également que g est bijective. Enfin, g majore $\mathcal{F}$.

Ainsi, toute partie totalement ordonnée de $\mathcal{E}$ possède un majorant. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{E}$ possède un élément maximal que nous noterons (A, f). Remarquons que l'on a donc $|A \times A| = |A|$.

Tout d'abord, constatons que l'ensemble A est infini. En effet, en supposant qu'il est fini de cardinal n, on obtient $n^2 = n$ et donc $n = 0$ ou $n = 1$. Par le lemme ci-dessus, on peut prolonger f en une bijection $g : B \longrightarrow B \times B$ où $A \subseteq B \subseteq E$ et B est dénombrable, ce qui contredit la maximalité de (A, f).

Nous allons montrer par l'absurde que $A \sim E$. Supposons donc $A \not\sim E$.

Supposons un instant que $|E \setminus A| \leq |A|$. Comme E est un ensemble infini et $E = (E \setminus A) \cup A$, l'ensemble A est alors infini. On a

$$|E| = |(E \setminus A) \cup A| = |E \setminus A| + |A| \leq |A| + |A| = |A|$$

Comme $A \subseteq E$, on a aussi $|A| \leq |E|$. Par le théorème de Cantor-Bernstein, $|A| = |E|$ et donc $A \sim E$, contradiction.

Puisque $|E \setminus A| \not\leq |A|$, on a donc $|A| \leq |E \setminus A|$. Il existe donc (en utilisant une injection de A dans $E \setminus A$) un ensemble $B \subseteq E \setminus A$ tel que $|A| = |B|$. Comme $|A \times A| = |A|$, on a

$$|A \times B| = |B \times B| = |B \times A| = |A \times A| = |A| = |B|$$

De là, comme les ensembles $A \times B$, $B \times B$ et $B \times A$ sont disjoints,

$$|(A \times B) \cup (B \times B) \cup (B \times A)| = |B| + |B| + |B| = |B|$$

Il existe donc une bijection $g : B \longrightarrow (A \times B) \cup (B \times B) \cup (B \times A)$. En réunissant g et la bijection $f : A \longrightarrow A \times A$, on obtient une bijection

$$h : A \cup B \longrightarrow (A \times A) \cup (A \times B) \cup (B \times B) \cup (B \times A)$$

Remarquons que

$$(A \times A) \cup (A \times B) \cup (B \times B) \cup (B \times A) = (A \cup B) \times (A \cup B)$$

On a donc $(A \cup B, h) \in \mathcal{E}$. De plus, on a clairement $(A, f) \preceq (A \cup B, h)$ et cependant $(A, f) \neq (A \cup B, h)$ ce qui contredit la maximalité de (A, f).

Pour résumer, nous venons de montrer par l'absurde que $A \sim E$. De là,

$$|E \times E| = |E| \times |E| = |A| \times |A| = |A \times A| = |A| = |E|$$

Ainsi, $\kappa \times \kappa = \kappa$. $\square$

Que dire du produit $\kappa \times \lambda$ de deux cardinalités ? Le résultat est très simple.

Proposition 60. *Soient κ et λ deux cardinalités non nulles dont l'une au moins est infinie. Alors,*

$$\kappa \times \lambda = \max(\kappa, \lambda)$$

Démonstration. Supposons par exemple $\kappa \leq \lambda$, et λ infinie. On a

$$\lambda = 1 \times \lambda \leq \kappa \times \lambda \leq \lambda \times \lambda = \lambda$$

On conclut par le théorème de Cantor-Bernstein que $\kappa \times \lambda = \lambda$. $\square$

7.3 Puissances

Pour les puissances, la situation est plus compliquée. Nous allons voir que les puissances de 2 jouent un rôle prépondérant dans l'étude des puissances.

Proposition 61. *Soient κ et λ deux cardinalités telles que λ est infinie et $2 \leq \kappa \leq 2^\lambda$. Alors, $\kappa^\lambda = 2^\lambda$.*

Démonstration. On a

$$2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda \times \lambda} = 2^\lambda$$

On conclut par le théorème de Cantor-Bernstein. $\square$

Nous avons déjà vu un cas particulier de ce résultat lorsque nous avons parlé des suites réelles, avec $\kappa = \mathfrak{c}$ et $\lambda = \omega$. On a $2 \leq \mathfrak{c} = 2^\omega$, donc $\mathfrak{c}^\omega = 2^\omega = \mathfrak{c}$.

Remarquons que par le théorème de Cantor, si $\kappa \leq \lambda$ alors $\kappa < 2^\lambda$ et donc $\kappa^\lambda = 2^\lambda$. Regardons maintenant ce qui se passe lorsque $1 \leq \lambda < \kappa$. Nous allons obtenir un résultat moins précis que le précédent.

Proposition 62. *Soient κ et λ deux cardinalités telles que $\lambda \neq 0$, κ est infinie et $1 \leq \lambda < \kappa$. Alors, $\kappa \leq \kappa^\lambda \leq 2^\kappa$.*

Démonstration.

$$\kappa \leq \kappa^\lambda \leq (2^\kappa)^\lambda = 2^{\kappa \times \lambda} = 2^\kappa$$

et on conclut par le théorème de Cantor-Bernstein. $\square$

Nous n'obtenons pas une égalité mais un simple encadrement. Remarquons que si λ est fini, nous avons vu que $\kappa^\lambda = \kappa$. En fait, cette égalité reste vraie même si λ est infini, pourvu qu'il soit « petit ». En revanche, si λ est « grand », la situation devient très compliquée. Les valeurs possibles de κ^λ dépendent en particulier de la véracité ou non de certaines propositions qui sont *indécidables*, comme par exemple l'*hypothèse du continue généralisée* GCH. Nous dirons quelques mots sur l'hypothèse du continu dans la section suivante. Nous verrons en particulier que si GCH est vérifiée, alors les deux seules valeurs possibles pour κ^λ lorsque $\lambda \leq \kappa$ sont κ et 2^κ.

Nous n'approfondirons pas davantage. L'étude des puissances de cardinaux est, pour tout dire, l'un des thèmes centraux de la théorie des ensembles.

8 Annexe - L'hypothèse du continu

Pour conclure cet article, disons quelques mots sur *l'hypothèse du continu.*

Nous avons vu que $\omega < 2^\omega = \mathfrak{c}$. Le premier, Georg Cantor a posé la question suivante. Existe-t-il une cardinalité κ telle que $\omega < \kappa < 2^\omega$? Plus concrètement, existe-t-il des parties infinies de $\mathbb{R}$ qui ne sont en bijection ni avec $\mathbb{N}$ ni avec $\mathbb{R}$? L'hypothèse du continu, appelée plus familièrement CH (Continuum Hypothesis) dit la chose suivante.

> **Vrai ou faux 63.** [Hypothèse du continu]
>
> *(CH) Soit κ une cardinalité telle que $\omega \leq \kappa \leq 2^\omega$. Alors, $\kappa = \omega$ ou $\kappa = 2^\omega$.*

Cantor a échoué dans ses tentatives, et pour cause ... Je resterai assez vague dans les quelques explications qui vont suivre, mais définir rigoureusement ce que je vais dire allongerait cet article de façon exagérée.

Le cadre usuel dans lequel travaillent les mathématiciens est la *théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec axiome du Choix*, plus simplement appelée ZFC.

Kurt Gödel a exhibé en 1938 un *modèle* de ZFC (l'univers des ensembles *constructibles*) dans lequel l'hypothèse du continu est vérifiée. Cela veut-il dire qu'il a démontré l'hypothèse du continu ? Non, car l'un des théorèmes de complétude de ce même Gödel dit que pour qu'une propriété soit un théorème d'une théorie, il faut et il suffit qu'elle soit vraie dans *tous* les modèles de cette théorie. Ce que Gödel a démontré, c'est donc un résultat négatif : si la théorie des ensembles est consistante, alors la *négation* $\neg$CH de l'hypothèse du continu n'est pas un théorème de la théorie des ensembles, puisque $\neg$CH est faux dans au moins un modèle. Symboliquement,

$$\mathrm{ZFC} \not\models \neg\mathrm{CH}$$

Cela signifie précisément qu'à partir des axiomes de la théorie des ensembles et des règles de déduction de la logique, il est impossible de prouver formellement $\neg$CH.

Le plus dur restait à faire...

En 1963, le mathématicien Paul Cohen a définitivement résolu la question. Il a créé un modèle de la théorie des ensembles (par une technique appelée le *forcing*) dans lequel CH n'est pas vérifiée. Précisément, Cohen a démontré que si la théorie des ensembles est consistante, alors CH n'est pas un théorème de la théorie des ensembles. Symboliquement,

$$\mathrm{ZFC} \not\models \mathrm{CH}$$

Ainsi, à partir des axiomes de la théorie des ensembles et des règles de déduction de la logique, il est impossible de prouver formellement CH.

L'hypothèse du continu est donc indécidable dans le système formel ZFC.

Citons pour terminer cet article une version généralisée de CH.

Vrai ou faux 64. [HYPOTHÈSE DU CONTINU GÉNÉRALISÉE]

(GCH) Soit Soit λ une cardinalité infinie. Soit κ une cardinalité telle que $\lambda \leq \kappa \leq 2^\lambda$. Alors, $\kappa = \lambda$ ou $\kappa = 2^\lambda$.