$\mathbb{R}$

Marc Lorenzi

24 septembre 2022

1 Corps ordonnés

1.1 Notion de corps ordonné

Définition 1. Un corps ordonné est un quadruplet $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$ où $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps et $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{K}$ vérifiant les conditions

- Pour tous $x, y, z \in \mathbb{K}$, $x < y \implies x + z < y + z$.
- Pour tous $x, y, z \in \mathbb{K}$, $x < y$ et $z > 0 \implies xz < yz$.

Bien entendu, $x < y$ signifie comme c'est l'usage que $x \leq y$ et $x \neq y$.

Exemple. Un exemple essentiel de corps ordonné est le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels.

Si $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$ est un corps ordonné, nous noterons $\mathbb{K}_+^*$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{K}$ strictement positifs et $\mathbb{K}_-^*$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{K}$ strictement négatifs.

Proposition 1. *Soit $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$ un corps ordonné.*

- *Les ensembles $\mathbb{K}_-^*$, $\{0\}$ et $\mathbb{K}_+^*$ sont disjoints deux à deux.*
- $\mathbb{K} = \mathbb{K}_-^* \cup \{0\} \cup \mathbb{K}_+^*$.
- *Pour tous $x, y \in \mathbb{K}_+^*$, $x + y \in \mathbb{K}_+^*$.*
- *Pour tous $x, y \in \mathbb{K}_+^*$, $xy \in \mathbb{K}_+^*$.*
- *Pour tout $x \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}_+^* \iff -x \in \mathbb{K}_-^*$.*

Démonstration. Démonstration facile. $\square$

Nous allons maintenant voir que les ensembles $\mathbb{K}_+^*$ et $\mathbb{K}_-^*$ caractérisent complètement la structure de corps ordonné de $\mathbb{K}$.

Proposition 2. *Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps. On suppose qu'il existe $N \subseteq \mathbb{K}$ et $P \subseteq K$ vérifiant les propriétés suivantes.*

- *Les ensembles N, $\{0\}$ et P sont disjoints deux à deux.*
- $\mathbb{K} = N \cup \{0\} \cup P$.
- *Pour tous $x, y \in P$, $x + y \in P$.*

- *Pour tous $x, y \in P$, $xy \in P$.*
- *Pour tout $x \in \mathbb{K}$, $x \in P \iff -x \in N$.*

Alors, il existe une unique relation $\leq$ faisant de $\mathbb{K}$ un corps ordonné, et telle que $P = \mathbb{K}_+^*$. On a alors $N = \mathbb{K}_-^*$.

Nous allons montrer ce résultat en plusieurs étapes. On suppose dans la suite donnés le corps $\mathbb{K}$ et les ensembles N et P. On suppose vérifiées les 4 hypothèses de la proposition ci-dessus.

Lemme 3. [Règle des signes]

Pour tous $x, y \in \mathbb{K}$,

- *$x \in P$ et $y \in P \implies xy \in P$.*
- *$x \in P$ et $y \in N \implies xy \in N$.*
- *$x \in N$ et $y \in P \implies xy \in N$.*
- *$x \in N$ et $y \in N \implies xy \in P$.*

Démonstration. Le premier point résulte de la définition. Montrons le second point, les autres sont identiques. Soient $x \in P$ et $y \in N$. On a $-y \in P$ et donc

$$-xy = x(-y) \in P$$

On en déduit que $-(-xy) = xy \in N$. $\square$

Lemme 4. [Unicité]

Il existe au plus une relation $\leq$ sur $\mathbb{K}$ faisant de $\mathbb{K}$ un corps ordonné et telle que $P = \mathbb{K}_+^*$.

Démonstration. Supposons donnée une telle relation. Soient $x, y \in \mathbb{K}$. Par la compatibilité de la relation $\leq$ avec l'addition, on a $x < y$ si et seulement si $y - x > 0$, c'est à dire $y - x \in P$. $\square$

Pour montrer l'existence, il nous reste à vérifier que cette relation a toutes les propriétés voulues.

Définition 2. Pour tous $x, y \in \mathbb{K}$, on pose

$$\begin{aligned} x < y &\iff y - x \in P \\ x \leq y &\iff x < y \text{ ou } x = y \end{aligned}$$

Lemme 5. *La relation $\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{K}$.*

Démonstration.

- Réflexivité. Soit $x \in \mathbb{K}$. On a $x = x$, donc $x \leq x$.

- Totalité. Soient $x, y \in \mathbb{K}$. Soit $z = y - x$. On a $z \in N$ ou $z = 0$ ou $z \in P$. Si $z \in N$, alors $-z = x - y \in P$, et donc $y < x$. Si $z = 0$, alors $x = y$. Et si $z \in P$, alors $x < y$.
- Antisymétrie. Soient $x, y \in \mathbb{K}$. Supposons $x \leq y$ et $y \leq x$. Supposons que $x \neq y$. On a alors $x < y$ et $y < x$, d'où $y - x \in P$ et $y - x \in N$, contradiction puisque $P \cap N = \emptyset$.
- Transitivité. Soient $x, y, z \in \mathbb{K}$. Supposons $x \leq y$ et $y \leq z$. Si $x = y$ ou $y = z$, on a clairement $x \leq z$. Sinon, $y - x \in P$ et $z - y \in P$. De là,

$$z - x = (z - y) + (y - x) \in P$$

et donc $x < z$.

$\square$

Lemme 6. *Pour tous $x, y, z \in \mathbb{K}$,*

$$x < y \implies x + z < y + z$$

Démonstration. Soient $x, y, z \in \mathbb{K}$. Supposons $x < y$. On a

$$(y + z) - (x + z) = y - x \in P$$

et donc $x + z < y + z$. $\square$

Lemme 7. *Pour tous $x, y, z \in \mathbb{K}$,*

$$\begin{array}{lcl} x < y \text{ et } z > 0 & \implies & xz < yz \\ x < y \text{ et } z < 0 & \implies & yz < xz \end{array}$$

Démonstration. Soient $x, y, z \in \mathbb{K}$. Supposons $x < y$ et $z > 0$. On a

$$yz - xz = (y - x)z \in P$$

car $y - x$ et z appartiennent à P. Ainsi, $xz < yz$.

Si, au contraire, $z < 0$, alors

$$yz - xz = (y - x)z \in N$$

car $y - x \in P$ et $z \in N$. Ainsi, $yz < xz$. $\square$

1.2 Les multiples rationnels de 1

Dans tout anneau, on dispose de la notion de multiple entier d'un élément. Nous allons voir que dans un corps ordonné, on peut parler de multiples rationnels. Donnons-nous un corps ordonné $\mathbb{K}$. Notons

$$\mathbb{Z}' = \{a1 : a \in \mathbb{Z}\}$$

Proposition 8. *L'application $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}'$ définie par $\varphi(n) = n1$ (le n^e multiple de 1) est un isomorphisme d'anneaux strictement croissant.*

Démonstration. On vérifie facilement que φ est un morphisme d'anneaux : ceci résulte directement des propriétés des multiples.

Montrons que φ est injective. Pour cela, montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) > 0$.

- Comme $\mathbb{K}$ est un corps, $1 \neq 0$, donc $1 < 0$ ou $1 > 0$. Par la règle des signes, $1 \times 1 > 0$. Or $1 \times 1 = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $n1 > 0$. On a alors

$$(n+1)1 = n1 + 1 > n1 + 0 = n1 > 0$$

De là, pour tout $n \in \mathbb{Z}_-^*$, $n1 = -(-n)1 < 0$. Ainsi, $\ker\varphi = \{0\}$ et φ est injectif.

Enfin, par définition de $\mathbb{Z}'$, $\varphi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}'$. Ainsi, φ est surjectif. φ est donc un isomorphisme d'anneaux.

Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. Supposons $m < n$. On a donc $n - n > 0$ et donc, comme nous l'avons déjà vu, $(n-m)1 = n1 - m1 > 0$. De là,

$$\varphi(m) = m1 < n1 = \varphi(n)$$

$\square$

Définition 3. Soit $x \in \mathbb{K}$. Soit $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, où $a, b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$. Le r^e multiple de x est

$$rx = \frac{ax}{b1}$$

Il s'agit de voir que cette définition a bien un sens, c'est à dire qu'elle ne dépend que du rationnel r, et pas des entiers a et b choisis pour le représenter. Pour cela, supposons que $r = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $b, d \neq 0$. On a donc $ad = bc$. De là,

$$adx = bcx$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$(ax)(d1) = (b1)(cx)$$

et donc

$$\frac{ax}{b1} = \frac{cx}{d1}$$

Notons

$$\mathbb{Q}' = \{r1 : r \in \mathbb{Q}\}$$

Proposition 9. *L'application $\psi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie pour tout $r \in \mathbb{Q}$ par*

$$\psi(r) = r1$$

est un isomorphisme strictement croissant de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}'$.

Démonstration. On vérifie facilement que ψ est un morphisme de corps de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}'$.

Il reste à vérifier que ψ est strictement croissant. Soient $x, y \in \mathbb{Q}$. Posons $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$, où $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $b, d > 0$. Supposons $x < y$, c'est à dire $ad < bc$. On en déduit $\varphi(ad) < \varphi(bc)$, c'est à dire $a1 \times d1 < b1 \times c1$, d'où, facilement, $\psi(x) < \psi(y)$. $\square$

Ainsi, si $\mathbb{K}$ est un corps ordonné, les multiples rationnels de 1 forment un sous-corps de $\mathbb{K}$ isomorphe, en tant que corps ordonné, à $\mathbb{Q}$. Nous identifierons ce sous-corps à $\mathbb{Q}$, sauf lorsque ceci prêtera à confusion.

1.3 Valeur absolue

Définition 4. Soit $\mathbb{K}$ un corps ordonné. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, la *valeur absolue* de x est

$$|x| = \max(-x, x)$$

Bien entendu, $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $-x$ si $x \leq 0$. Remarquons aussi que $|x| \geq 0$. La valeur absolue vérifie les propriétés usuelles.

Proposition 10. *Soit $\mathbb{K}$ un corps ordonné. Pour tous $x, y \in \mathbb{K}$,*

- $|x| \geq 0$.
- $|x| = 0 \iff x = 0$.
- $|xy| = |x||y|$.
- $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

Démonstration. Les deux premiers points sont faciles. Pour le troisième point, il suffit de considérer 4 cas, selon que x et y sont positifs ou négatifs. Montrons l'inégalité triangulaire. Soient $x, y \in \mathbb{K}$. On a $x \leq |x|$ et $y \leq |y|$, donc

$$x + y \leq |x| + |y|$$

De même, $-x \leq |x|$ et $-y \leq |y|$, donc

$$-(x + y) \leq |x| + |y|$$

Comme $|x + y|$ est égal à $x + y$ ou $-x - y$, on en déduit que

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Le dernier point est une conséquence du précédent. Soient $x, y \in \mathbb{K}$. On a

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$$

De là,

$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

En échangeant les rôles de x et y, on obtient aussi que

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$$

D'où, facilement, le résultat. $\square$

2 Suites de Cauchy

Dans toute cette section, $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$ désigne un corps ordonné.

2.1 Suites à valeurs dans un corps ordonné

Définition 5. Soit $a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Soit $\ell \in \mathbb{K}$. La suite a tend vers ℓ si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{K}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On vérifie facilement les propriété usuelles des limites : unicité de la limite, opérations sur les limites, passage à la limite dans les inégalités, suites extraites, etc.

2.2 Suites de Cauchy

Définition 6. Soit $a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La suite a est une *suite de Cauchy* lorsque

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{K}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \geq N, \forall n \geq N, |a_m - a_n| \leq \varepsilon$$

Si la suite a est de Cauchy, alors $a_{n+1} - a_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. La réciproque est fausse. Cela dit, si $a_{n+1} - a_n$ tend « suffisamment vite » vers 0, alors la suite est de Cauchy. Énonçons par exemple le résultat suivant.

Proposition 11. *Soit a une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On suppose qu'il existe un rationnel k tel que $0 \leq k < 1$ et, pour tout entier n assez grand,*

$$|a_{n+1} - a_n| \leq k|a_n - a_{n-1}|$$

Alors la suite a est une suite de Cauchy.

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$,

$$|a_{n+1} - a_n| \leq k|a_n - a_{n-1}|$$

Par une récurrence facile, on montre que pour tout $n \geq N$,

$$|a_{n+1} - a_n| \leq k^{n-N}|a_{N+1} - a_N|$$

Soient $m, n \geq N$. Prenons par exemple $n \leq m$. On a

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= \left| \sum_{j=n}^{m-1} (a_{j+1} - a_j) \right| \\
&\leq \sum_{j=n}^{m-1} |a_{j+1} - a_j| \\
&\leq |a_{N+1} - a_N| \sum_{j=n}^{m-1} k^{j-N} \\
&= |a_{N+1} - a_N| \frac{k^{n-N}}{1-k}
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$. Comme $0 \leq k < 1$, k^{n-N} tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. De là, il existe un entier N' tel que pour tout $n \geq N'$,

$$|a_{N+1} - a_N| \frac{k^{n-N}}{1-k} \leq \varepsilon$$

Ainsi, pour tous $m, n \geq \max(N, N')$ tels que $n \leq m$,

$$|a_m - a_n| \leq \varepsilon$$

La suite a est donc une suite de Cauchy. □

2.3 Suites de Cauchy et suites convergentes

Proposition 12. *Toute suite convergente d'éléments de $\mathbb{K}$ est une suite de Cauchy.*

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Supposons que a converge vers $\ell \in \mathbb{K}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq \mathbb{N}$, $|a_n - \ell| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Soient $m, n \geq \mathbb{N}$. On a

$$|a_m - a_n| = |(a_m - \ell) + (\ell - a_n)| \leq |a_m - \ell| + |a_n - \ell| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

□

La question de la réciproque est le point central de cet article. Nous verrons plus loin qu'il existe des suites de Cauchy de rationnels qui divergent dans $\mathbb{Q}$. L'idée de la construction de $\mathbb{R}$ est justement de fabriquer un corps ordonné dans lequel les suites de Cauchy convergent.

Définition 7. Le corps ordonné $\mathbb{K}$ est *complet* (ou plus rigoureusement Cauchy-complet) si toute suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente.

2.4 Suites de Cauchy et suites bornées

Proposition 13. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m, n \geq N$, $|a_m - a_n| \leq 1$. Soit $n \geq N$. On a alors, en prenant $m = N$, $|a_n - a_N| \leq 1$. De là, pour tout $n \geq N$,

$$|a_n| = |(a_n - a_N) + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| \leq 1 + |a_N|$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n| \leq \max(|a_0|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|)$$

□

Bien entendu, il existe des suites bornées qui ne sont pas de Cauchy, comme par exemple la suite de terme général $(-1)^n$.

2.5 L'anneau des suites de Cauchy

Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$.

Proposition 14. $(\mathcal{C}, +, \times)$ *est un anneau commutatif.*

Démonstration. Nous allons montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-anneau de l'anneau commutatif $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +\times)$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$.

La suite constante égale à 1, neutre pour la multiplication des suites, est clairement une suite de Cauchy.

Soient $a, b \in \mathcal{C}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$. Il existe deux entiers N_1 et N_2 tels que

- pour tous $m, n \geq \mathbb{N}_1$, $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$.
- pour tous $m, n \geq \mathbb{N}_2$, $|b_m - b_n| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$.

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. On a alors, pour tous $mn, n \geq N$,

$$|(a+b)_m - (a+b)_n| = |(a_m - a_n) + (b_m - b_n)| \leq |a_m - a_n| + |b_m - b_n| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Ainsi, $a + b \in \mathcal{C}$.

Soient $a, b \in \mathcal{C}$. Notons M_a et M_b des majorants strictement positifs des suites $|a|$ et $|b|$. Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{array}{rcl} |(ab)_m - (ab)_n| & = & |a_m(b_m - b_n) + b_n(a_m - a_n)| \\ & \leq & |a_m||b_m - b_n| + |b_n||a_m - a_n| \\ & \leq & M_a|b_m - b_n| + M_b|a_m - a_n| \end{array}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$. Il existe deux entiers N_1 et N_2 tels que

- Pour tous $m, n \geq N_1$, $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{2M_b}\varepsilon$.
- Pour tous $m, n \geq N_2$, $|b_m - b_n| \leq \frac{1}{2M_a}\varepsilon$.

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. On a pour tous $m, n \geq N$,

$$|(ab)_m - (ab)_n| \leq M_a|b_m - b_n| + M_b|a_m - a_n| \leq \varepsilon$$

Ainsi, $ab \in \mathcal{C}$. $\square$

2.6 Racine carrée

Considérons ce paragraphe comme un intermède. En fait, nous aurons besoin de ce résultat à la fin de l'article. Nous allons montrer que dans un corps ordonné complet, tous les éléments positifs du corps possèdent une racine carrée.

Proposition 15. *Soit $\mathbb{K}$ un corps ordonné complet. Pour tout $x \in \mathbb{K}_+^*$, il existe un unique $t \in \mathbb{K}_+^*$ tel que $t^2 = x$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{K}_+^*$. L'unicité est facile. Si $t, t' \in \mathbb{K}_+^*$ vérifient

$$t^2 = t'^2 = x$$

on a alors

$$(t - t')(t + t') = 0$$

et donc $t' = \pm t$. Comme $t, t' > 0$, on a nécessairement $t' = t$.

Pour la preuve de l'existence, remarquons que si $0 < x < 1$, alors $\frac{1}{x} > 1$. Ainsi, il suffit de faire la démonstration pour $x > 1$, ce que nous supposons dorénavant.

Considérons la suite a définie par $a_0 = x$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + x}{2a_n}$$

Les a_n sont clairement des éléments de $\mathbb{K}$ strictement positifs.

Montrons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n^2 \geq x$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - x &= \left(\frac{a_n^2 + x}{2a_n}\right)^2 - x \\ &= \frac{a_n^4 - 2a_n^2 x + x^2}{4a_n^2} \\ &= \frac{(a_n^2 - x)^2}{4a_n^2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

De plus, $a_0^2 = x^2 \geq x$ car $x > 1$.

Montrons que la suite a est de Cauchy. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{a_n^2 + x}{2a_n} - \frac{a_{n-1}^2 + x}{2a_{n-1}} \\
&= \frac{(a_n^2 + x)a_{n-1} - (a_{n-1}^2 + x)a_n}{2a_n a_{n-1}} \\
&= (a_n - a_{n-1})\frac{a_n a_{n-1} - x}{2a_n a_{n-1}} \\
&= \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1})\left(1 - \frac{x}{a_n a_{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

Remarquons que

$$(a_n a_{n-1})^2 = a_n^2 a_{n-1}^2 \geq x^2$$

et donc $a_n a_{n-1} \geq x$. De là,

$$0 \leq 1 - \frac{x}{a_n a_{n-1}} < 1$$

et donc

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|$$

Par la proposition 11, la suite a est de Cauchy. Comme $\mathbb{K}$ est complet, elle converge. Soit t sa limite.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n^2 \geq x > 1$, on a $a_n \geq 1$. Par passage à la limite, $t \geq 1 > 0$. En passant à la limite dans la relation de récurrence qui définit a, on a

$$t = \frac{t^2 + x}{2t}$$

et donc $t^2 = x$. $\square$

3 Suites de Cauchy de rationnels

Dans toute la suite, nous noterons $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de rationnels.

3.1 La non-complétude de $\mathbb{Q}$

Proposition 16. *Il existe des suites de Cauchy de rationnels qui divergent.*

Démonstration. Considérons la suite a définie par $a_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n}$$

Reprenons la preuve faite dans le paragraphe précédent, avec $x = 2$. La preuve que la suite a était de Cauchy n'utilisait pas la complétude de $\mathbb{K}$. Ainsi, a est une suite de Cauchy.

Nous avons également vu que si a converge, alors sa limite est un rationnel $t > 0$ tel que $t^2 = 2$. Or, un tel rationnel n'existe pas. Supposons en effet son existence. Posons $t = \frac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$. On a alors $p^2 = 2q^2$. De là, $p \mid 2q^2$. Comme $p \wedge q^2 = 1$, on obtient par le lemme de Gauss que $p \mid 2$. Ainsi, $p = 1$ ou $p = 2$. De même, $q \mid p^2$. Comme $q \wedge p^2 = 1$, toujours avec le lemme de Gauss, on déduit $q \mid 1$ et donc $q = 1$. Ainsi, $t = 1$ ou $t = 2$, contradiction. □

3.2 Équivalence de suites de Cauchy

Définition 8. On définit une relation $\simeq$ sur $\mathcal{C}$ en posant, pour toutes suites $a, b \in \mathcal{C}$,

$$a \simeq b \iff a - b \longrightarrow 0$$

Proposition 17. *La relation $\simeq$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$.*

Démonstration.

- Soit $a \in \mathcal{C}$. On a $a - a = 0 \longrightarrow 0$, donc $a \simeq a$.
- Soient $a, b \in \mathcal{C}$. Supposons $a \simeq b$. On a $a - b \longrightarrow 0$ et donc, en passant à l'opposé, $b - a \longrightarrow 0$, d'où $b \simeq a$.
- Soient $a, b, c \in \mathcal{C}$. Supposons $a \simeq b$ et $b \simeq c$. On a $a - b \longrightarrow 0$ et $b - c \longrightarrow 0$ d'où, en sommant,

$$a - c = (a - b) + (b - c) \longrightarrow 0 + 0 = 0$$

□

Pour toute suite $a \in \mathcal{C}$, nous noterons $[a]$ la classe d'équivalence de a modulo $\simeq$:

$$[a] = \{b \in \mathcal{C} : b - a \longrightarrow 0\}$$

3.3 L'ensemble $\mathbb{R}$

Appelons $\mathbb{R}$ l'ensemble quotient $\mathcal{C}/\simeq$. On a a donc

$$\mathbb{R} = \{[a] : a \in \mathcal{C}\}$$

Remarque. L'ensemble $\mathcal{Z}$ des suites de Cauchy de rationnels qui tendent vers 0 est un idéal de $\mathcal{C}$, et même un idéal maximal. Ceci entraîne automatiquement que $\mathbb{R}$ a une structure de corps. Dans ce qui suit, nous allons démontrer tout cela « à la main ».

4 Le corps des réels

4.1 Addition

Proposition 18. *Soient* $a, b, a', b' \in \mathcal{C}$. *On suppose* $a \simeq a'$ *et* $b \simeq b'$. *On a alors* $a + b \simeq a' + b'$.

Démonstration. On a

$$(a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b)$$

Comme la somme de deux suites qui tendent vers 0 tend encore vers 0, il en résulte que $(a' + b') - (a + b)$ tend vers 0, et donc que $a + b \simeq a' + b'$. □

Définition 9. Pour tous $a, b \in \mathcal{C}$, on pose

$$[a] + [b] = [a + b]$$

Grâce à la proposition précédente, la définition de $[a] + [b]$ ne dépend que des *classes* de a et b, et pas des représentants a et b. Nous avons donc bien défini une opération dans $\mathbb{R}$.

Proposition 19. $(\mathbb{R}, +)$ *est un groupe abélien.*

Démonstration.

- Soient $x = [a]$ et $y = [b]$ deux réels. On a

$$x + y = [a] + [b] = [a + b] = [b + a] = [b] + [a] = y + x$$

- De même, l'associativité de l'addition dans $\mathbb{R}$ résulte de l'associativité de l'addition dans $\mathcal{C}$.
- Le neutre de l'addition dans $\mathbb{R}$ est la classe de la suite constante égale à 0, c'est à dire l'ensemble des suites de rationnels qui tendent vers 0.
- Si $x = [a] \in \mathbb{R}$, l'opposé de x est $[-a]$, puisque

$$[a] + [-a] = [a - a] = [0]$$

□

4.2 Multiplication

Proposition 20. *Soient* $a, b, a', b' \in \mathcal{C}$. *On suppose* $a \simeq a'$ *et* $b \simeq b'$. *On a alors* $ab \simeq a'b'$.

Démonstration. On a

$$a'b' - ab = (a' - a)b' + a(b' - b)$$

Les suites a et b' sont bornées (car de Cauchy), $a' - a$ tend vers 0 et $b' - b$ aussi. De là, $a'b' - ab$ tend vers 0, et donc $ab \simeq a'b'$. □

Définition 10. Pour tous $a, b \in \mathcal{C}$, on pose

$$[a][b] = [ab]$$

Grâce à la proposition précédente, la définition de $[a][b]$ ne dépend que des *classes* de a et b, et pas des représentants a et b. Nous avons donc bien défini une opération dans $\mathbb{R}$.

Proposition 21. $(\mathbb{R}, +, \times)$ *est un anneau commutatif.*

Démonstration. Comme pour la preuve des propriétés de l'addition, cela résulte de ce que $(\mathcal{C}, +, \times)$ est un anneau commutatif. Par exemple, si $x = [a]$, $y = [b]$ et $z = [c]$ sont trois réels, on a

$$\begin{aligned} (xy)z &= ([a][b])[c] = [ab][c] \\ &= [(ab)c] = [a(bc)] \\ &= [a][bc] = [a]([b][c]) \\ &= x(yz) \end{aligned}$$

Le neutre de la multiplication dans $\mathbb{R}$ est la classe de la suite constante égale à 1, c'est à dire l'ensemble des suites de rationnels qui tendent vers 1. □

4.3 Inclusion des rationnels

Pour tout rationnel r, notons $\underline{r}$ la suite constante égale à r. Cette suite est évidemment une suite de Cauchy. Considérons l'application $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(r) = [\underline{r}]$. On montre facilement que φ est un morphisme de corps. L'image de $\mathbb{Q}$ par φ, $\mathbb{Q}' = \varphi(\mathbb{Q})$, est ainsi un sous-corps de $\mathbb{R}$ isomorphe à $\mathbb{Q}$. Remarquons que les neutres pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ sont $[\underline{0}]$ et $[\underline{1}]$.

4.4 Structure de corps

L'anneau $\mathcal{C}$ n'est pas un corps. Ce n'est même pas un anneau intègre. Par exemple, considérons la suite a définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_{2n} = \frac{1}{n+1}$ et $a_{2n+1} = 0$. Soit b la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $b_{2n} = 0$ et $b_{2n+1} = \frac{1}{n+1}$. Ces deux suites de rationnels tendent vers 0, elles sont donc de Cauchy. De plus, a et b sont non nulles et pourtant $ab = 0$. Le passage au quotient par la relation $\simeq$ règle le problème.

Proposition 22. $(\mathbb{R}, +, \times)$ *est un corps.*

Démonstration. On a bien sûr $[\underline{0}] \neq [\underline{1}]$. Les neutres pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ sont donc distincts. Soit $x = [a]$ un réel différent de $[\underline{0}]$. La suite a est donc une suite de Cauchy de rationnels qui ne tend pas vers 0. Dit autrement,

$$\exists \alpha \in \mathbb{Q}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists m \geq N, |a_m| > \alpha$$

Prenons un tel α et appliquons la propriété de Cauchy à $\frac{1}{2}\alpha$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m, n \geq N$,

$$|a_m - a_n| \leq \frac{1}{2}\alpha$$

Soit $m \geq N$ tel que $|a_m| > \alpha$. On a alors pour tout $n \geq N$,

$$||a_n| - |a_m|| \leq |a_n - a_m| \leq \frac{1}{2}\alpha$$

De là, pour tout $n \geq N$,

$$-\frac{1}{2}\alpha \leq |a_n| - |a_m| \leq \frac{1}{2}\alpha$$

et donc

$$\frac{1}{2}\alpha < |a_m| - \frac{1}{2}\alpha \leq |a_n|$$

Considérons la suite b de rationnels définie par

- $b_n = 0$ si $n < N$.
- $b_n = \frac{1}{a_n}$ si $n \geq N$.

Montrons que la suite b est de Cauchy. Pour tous $m, n \geq N$, on a

$$|b_m - b_n| = \left|\frac{1}{a_m} - \frac{1}{a_n}\right| = \left|\frac{a_n - a_m}{a_m a_n}\right| \leq \frac{4}{\alpha^2}|a_n - a_m|$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. La suite a étant de Cauchy, il existe un entier N' tel que pour tous $m, n \geq N'$,

$$|a_n - a_m| \leq \frac{\alpha^2 \varepsilon}{4}$$

Pour tous $m, n \geq \max(N, N')$, on a alors

$$|b_n - b_m| \leq \varepsilon$$

On a donc $b \in \mathcal{C}$. De plus $(ab)_n = 1$ pour tout $n \geq N$, et donc $ab \simeq 1$. Ainsi, en posant $y = [b]$, on a

$$xy = [\underline{1}]$$

Le réel x est donc inversible pour la multiplication. $\square$

5 Structure de corps ordonné

5.1 Une partition de $\mathcal{C}$

Proposition 23. *Soit a une suite de Cauchy de rationnels. On est dans un, et un seul, des trois cas suivants :*

- *La suite a tend vers 0.*
- *Il existe un rationnel $\alpha > 0$ tel que pour tout entier n assez grand, $a_n \geq \alpha$.*
- *Il existe un rationnel $\alpha > 0$ tel que pour tout entier n assez grand, $a_n \leq -\alpha$.*

Démonstration. Il est clair que les trois cas s'excluent mutuellement.

Supposons que a ne tend pas vers 0. Reprenons la preuve de l'inversibilité des réels non nuls. Il existe un rationnel $\alpha > 0$ et un entier N' tels que pour tout $n \geq N'$, $|a_n| \geq 2\alpha$. Par ailleurs, la propriété de Cauchy nous permet d'affirmer qu'il existe un entier N'' tel que pour tous $m, n \geq N''$, $|a_m - a_n| \leq \alpha$. Soit $N = \max(N', N'')$. Supposons par exemple que $a_N > 0$. Comme $N \geq N'$, on a donc $a_N \geq 2\alpha$. On a pour tout $n \geq N$, $|a_n - a_N| \leq \alpha$, c'est à dire

$$-\alpha \leq a_n - a_N \leq \alpha$$

De là,

$$\alpha < a_N - \alpha \leq a_n$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$, $a_n \geq \alpha$. Un raisonnement analogue permet de conclure si $a_N < 0$. □

- Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites $a \in \mathcal{C}$ telles qu'il existe un rationnel $\alpha > 0$ tel que pour tout entier n assez grand, $a_n \geq \alpha$.
- Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des suites $a \in \mathcal{C}$ telles qu'il existe un rationnel $\alpha > 0$ tel que pour tout entier n assez grand, $a_n \leq -\alpha$.

La proposition précédente montre que les ensembles $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$ et $\{\underline{0}\}$ sont disjoints et que, de plus,

$$\mathcal{N} \cup \{\underline{0}\} \cup \mathcal{P} = \mathcal{C}$$

Remarquons également que si $a \in \mathcal{C}$, on a $a \in \mathcal{P}$ si et seulement si $-a \in \mathcal{N}$.

5.2 Passage au quotient

Proposition 24. *Soient $a, b \in \mathcal{C}$. On suppose que $a \in \mathcal{P}$ et $a \simeq b$. Alors, $b \in \mathcal{P}$.*

On a évidemment un résultat analogue en remplaçant $\mathcal{P}$ par $\mathcal{N}$.

Démonstration. Soient $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ et $N' \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N'$, $a_n \geq \alpha$. Comme $a \simeq b$, la suite $b - a$ tend vers 0. Il existe donc $N'' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N''$, $|b_n - a_n| \leq \frac{1}{2}\alpha$. Soit $N = \max(N', N'')$. Soit $n \geq N$. On a

$$b_n \geq a_n - \frac{1}{2}\alpha \geq \frac{1}{2}\alpha$$

Ainsi, $b \in \mathcal{P}$. $\square$

Notons

$$\begin{aligned} P &= \{[a] : a \in \mathcal{P}\} \\ N &= \{[a] : a \in \mathcal{N}\} \end{aligned}$$

Proposition 25. *Les ensembles P, N et $\{[\underline{0}]\}$ forment une partition de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $x = [a] \in \mathbb{R}$. Par la proposition 23, on a $a \in \mathcal{P}$, ou $a \in \mathcal{N}$, ou $[a] = [0]$. Dit autrement, $x \in P$, $x \in N$ ou $x = [0]$. Ainsi,

$$N \cup \{0\} \cup P = \mathbb{R}$$

Il reste à voir que ces trois ensembles sont disjoints deux à deux. Soit $x \in P$. Il existe $a \in \mathcal{P}$ telle que $x = [a]$. Par la proposition 24, pour toute suite $b \simeq a$, $b \in \mathcal{P}$. De là, $x \neq [\underline{0}]$ et $x \notin N$. De même, si $x \in N$, alors $x \neq [\underline{0}]$ et $x \notin P$. Enfin, $[\underline{0}] \notin P$ et $[\underline{0}] \notin N$. $\square$

Proposition 26. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in P \iff -x \in N$.*

Démonstration. Soit $x = [a] \in \mathbb{R}$. Supposons $x \in P$. Il existe donc un rationnel $\alpha > 0$ tel que pour tout n assez grand, $a_n \geq \alpha$. De là, pour tout n assez grand, $-a_n \leq -\alpha$, et donc $-x = [-a] \in N$. La réciproque se montre de la même façon. $\square$

Proposition 27. *Pour tous $x, y \in P$, $x + y$ et xy appartiennent à P.*

Démonstration. Soient $x = [a]$ et $y = [b]$ deux éléments de P. Il existe deux rationnels $\alpha, \beta > 0$ tels que pour tout entier n assez grand, $a_n \geq \alpha$ et $b_n \geq \beta$. De là, pour tout n assez grand, $a_n + b_n \geq \alpha + \beta$ et $a_n b_n \geq \alpha\beta$. Ainsi, les suites $a + b$ et ab appartiennent à $\mathcal{P}$ et donc les réels x et y appartiennent à P. $\square$

Le corps $\mathbb{R}$, grâce aux ensembles N et P, est ainsi un corps ordonné. Nous noterons $\leq$ la relation d'ordre correspondante, et $<$ l'ordre strict associé.

5.3 Compatibilité avec l'ordre de $\mathbb{Q}$

Rappelons que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $\underline{r}$ est la suite constante égale à r.

Proposition 28. *Soient $r, s \in \mathbb{Q}$. On a $r < s \iff [\underline{r}] < [\underline{s}]$.*

Démonstration. Supposons $r < s$. Soit $\alpha = s - r > 0$. On a évidemment $s - r \geq \alpha$, donc

$$[\underline{s}] - [\underline{r}] = [\underline{s - r}] > [\underline{0}]$$

Ainsi, $[\underline{r}] < [\underline{s}]$. Inversement, supposons $[\underline{r}] < [\underline{s}]$, c'est à dire $[\underline{s} - \underline{r}] > [\underline{0}]$. Il existe donc un rationnel $\alpha > 0$ tel que pour tout n assez grand, $(\underline{s} - \underline{r})_n \geq \alpha$. Mais $(\underline{s} - \underline{r})_n = s - r$, donc $s - r \geq \alpha > 0$, d'où $r < s$. $\square$

Ainsi, l'ordre que nous avons défini sur $\mathbb{R}$ prolonge l'ordre usuel sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels.

Dorénavant, nous identifierons le rationnel r avec le réel $[\underline{r}]$. Nous noterons donc 0, et pas $[\underline{0}]$, 1 et pas $[\underline{1}]$, etc.

5.4 Valeur absolue

Comme dans tout corps ordonné, on dispose dans $\mathbb{R}$ de la notion de valeur absolue. Ici encore, il n'y a pas d'ambiguïté pour les rationnels. Si $a \in \mathbb{Q}$ est un rationnel positif, c'est aussi un réel positif. De même si a est négatif. Remarquons également le résultat suivant.

Proposition 29. *Soit a une suite de rationnels. On a*

$$|[a]| = [(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}]$$

Démonstration. Supposons par exemple $[a] > 0$ (les autres cas sont analogues). Il existe un rationnel $\alpha > 0$ et un entier $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, $a_n \geq \alpha$. On a donc pour tout $n \geq N$, $|a_n| = a_n$ et donc les suites $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ et a ont les mêmes termes à partir du rang N. Ces deux suites sont donc équivalentes pour la relation $\simeq$, et ainsi,

$$[(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}] = [a]$$

$\square$

6 La propriété d'Archimède

6.1 Corps archimédiens

Définition 11. Soit $(\mathbb{K}, +, \times \leq)$ un corps ordonné. Le corps $\mathbb{K}$ est *archimédien* si pour tous $x, y \in \mathbb{K}_+^*$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $mx > y$.

Un exemple de corps ordonné Archimédien est vite trouvé.

Proposition 30. *$\mathbb{Q}$ est archimédien.*

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$. Posons $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$, où $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a $mx > y$ si et seulement si $mad > bc$. Un tel m existe, il suffit de prendre par exemple $m = bc + 1$. $\square$

Proposition 31. *Soit $\mathbb{K}$ un corps ordonné archimédien. Soient $x, y \in \mathbb{K}$. On suppose que $x > 0$. Alors, il existe un unique $m \in \mathbb{Z}$ tel que*

$$mx \leq y < (m+1)x$$

Démonstration. Commençons par l'unicité. Soient m, m' deux entiers relatifs vérifiant la propriété. On a donc $mx < (m'+1)x$. En multipliant cette inégalité par $\frac{1}{x} > 0$, il vient $m < m' + 1$ et donc $m \leq m'$. De même, $m' \leq m$.

Prouvons maintenant l'existence. Commençons par supposer que $y > 0$. Considérons l'ensemble

$$E = \{m \in \mathbb{N} : mx > y\}$$

Par la proposition précédente, E est une partie non vide de $\mathbb{N}$, qui admet donc un plus petit élément p. Clairement, $p \geq 1$. En posant $m = p - 1$, on a donc $m \in \mathbb{N}$, et $x < (m+1)y$. Comme $m < p$, on en déduit par la minimalité de p que $mx \leq y$.

Si $y = 0$, $m = 0$ convient. Si $y < 0$, il suffit d'appliquer ce qui précède à $-y$. $\square$

Proposition 32. *Soit $\mathbb{K}$ un corps ordonné. Le corps $\mathbb{K}$ est archimédien si et seulement si $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{K}$.*

Démonstration. Par $\mathbb{Q}$, nous entendons bien entendu les fractions de multiples de 1.

($\Rightarrow$) Supposons $\mathbb{K}$ archimédien. Soit $x \in \mathbb{K}_+^*$. Par la propriété d'Archimède appliquée à 1 et $\frac{1}{x}$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{x} < m$. On en déduit que $0 < \frac{1}{m} < x$. On conclut en posant $r = \frac{1}{m}$.

Soient maintenant $x, y \in \mathbb{K}$ tels que $x < y$. Comme $y - x > 0$, il existe $s \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < s < y - x$. Appliquons le corollaire de la propriété d'Archimède. Il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$ms \leq x < (m+1)s$$

Notons $r = (m+1)s$. On a $r \in \mathbb{Q}$ et

$$r - s \leq x < r$$

De la première inégalité, on déduit que

$$r \leq x + s < x + (y - x) = y$$

Ainsi, $x < r < y$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{K}$. Soient $x, y \in \mathbb{K}_+^*$. Soit $r \in \mathbb{Q}$ tel que

$$\frac{y}{x} < r < \frac{y}{x} + 1$$

Un tel r est strictement positif, puisque $\frac{y}{x} > 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $r \leq m$. On a $y < rx \leq mx$, d'où la propriété d'Archimède. $\square$

Venons-en à ce qui nous intéresse.

6.2 Le cas des réels

Proposition 33. $\mathbb{R}$ *est archimédien.*

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $x = [a]$ et $y = [b]$. Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_+^*$ tels que pour tout n assez grand on ait $a_n \geq \alpha$ et $b_n - a_n \geq \beta$, et donc $b_n \geq \alpha + \beta$.

La suite b est de Cauchy, donc majorée par un rationnel $\gamma > 0$. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m\alpha \geq \gamma + 1$. On a alors pour tout entier n assez grand,

$$ma_n \geq m\alpha \geq \gamma + 1 \geq b_n + 1$$

De là, pour tout n assez grand,

$$ma_n - b_n \geq 1$$

et donc

$$mx - y = [ma - b] > 0$$

$\square$

Puisque $\mathbb{R}$ est un corps ordonné archimédien, on a donc la propriété ci-dessous.

Proposition 34. $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

7 Complétude

Nous sommes maintenant en possession du corps ordonné $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$. $\mathbb{R}$ est un corps ordonné archimédien, tout comme $\mathbb{Q}$. En quoi $\mathbb{R}$ est-il « meilleur » que $\mathbb{Q}$? Nous allons prouver dans cette section que $\mathbb{R}$ est complet.

7.1 Levée d'ambiguïtés

Il s'agit avant tout de lever quelques ambiguïtés possibles concernant les suites de rationnels. Pour l'instant, parlons de $\mathbb{Q}$-convergence pour une suite de rationnel qui tend vers un rationnel dans le corps ordonné $(\mathbb{Q}, +, \times, \leq)$, et de $\mathbb{R}$-convergence pour une suite réelle qui tend vers un réel dans le corps ordonné $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$.

Proposition 35. *Soit a une suite de rationnels. Soit $r \in \mathbb{Q}$. La suite a $\mathbb{Q}$-converge vers r si et seulement si elle $\mathbb{R}$-converge vers r.*

Démonstration. Supposons que a $\mathbb{Q}$-converge vers r. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $\varepsilon' \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|a_n - r| \leq \varepsilon'$. On a alors pour tout $n \geq N$, $|a_n - r| \leq \varepsilon$. Ainsi, la suite a $\mathbb{R}$-converge vers r.

Supposons, inversement, que a $\mathbb{R}$-converge vers r. Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Alors, avec nos identifications, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|a_n - r| \leq \varepsilon$. □

Il n'est donc plus nécessaire de faire la distinction, pour les suites de rationnels, entre $\mathbb{Q}$-convergence et $\mathbb{R}$-convergence. Remarquons toutefois qu'il est tout à fait possible qu'une suite de rationnels soit $\mathbb{Q}$-divergente, mais qu'elle soit $\mathbb{R}$-convergente. Dans ce cas, par ce qui précède, sa $\mathbb{R}$-limite ne peut pas être un rationnel.

De la même façon, parlons provisoirement de suites de rationnels $\mathbb{Q}$-Cauchy et de suites de réels $\mathbb{R}$-Cauchy.

Proposition 36. *Soit a une suite de rationnels. Alors, a est $\mathbb{Q}$-Cauchy si et seulement si a est $\mathbb{R}$-Cauchy.*

Démonstration. Supposons que a est $\mathbb{Q}$-Cauchy. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $\varepsilon' \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $\varepsilon' \leq \varepsilon$. Comme la suite a est $\mathbb{Q}$-Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m, n \geq N$, $|a_n - a_m| \leq \varepsilon'$. A fortiori, $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$. Ainsi, a est $\mathbb{R}$-Cauchy.

Supposons inversement que a est $\mathbb{R}$-Cauchy. Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Avec nos identifications, on a aussi $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m, n \geq N$, $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$. □

7.2 La complétude de $\mathbb{R}$

Jusqu'à présent, rien ne nous permet d'affirmer qu'il existe des irrationnels. Notre construction de $\mathbb{R}$ pourrait fort bien ne rien faire d'autre que produire une copie de $\mathbb{Q}$. Bien évidemment, c'est loin d'être le cas. Nous avons vu qu'il existe des suites de Cauchy de rationnels qui $\mathbb{Q}$-divergent. Nous allons montrer que ces suites $\mathbb{R}$-convergent. Comme nous l'avons déjà signalé, leur limite est forcément un irrationnel.

Proposition 37. *Soit a une suite de rationnels $\mathbb{Q}$-Cauchy. Alors, la suite a $\mathbb{R}$-converge vers le réel $[a]$.*

Démonstration. Nous allons ici devoir revenir un peu à nos notations d'origine pour les rationnels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{array}{rcl} a_n - [a] & = & [(a_n, a_n, a_n, \ldots)] - [(a_0, a_1, a_2, \ldots)] \\ & = & [(a_n - a_0, a_n - a_1, a_n - a_2, \ldots)] \\ & = & [(a_n - a_m)_{m \in \mathbb{N}}] \end{array}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. La suite a est $\mathbb{Q}$-Cauchy, donc $\mathbb{R}$-Cauchy. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m, n \geq N$, $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$. Par la proposition 29, on a

$$|a_n - [a]| = [(|a_n - a_m|)_{m \in \mathbb{N}}]$$

De là, pour tout $n \geq N$, $|a_n - [a]| \leq \varepsilon$. □

Proposition 38. *Soit a une suite de Cauchy de réels. Alors, la suite a converge.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $r_n \in \mathbb{Q}$ tel que

$$|a_n - r_n| \leq \frac{1}{n+1}$$

Un tel r_n existe par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons que la suite r est $\mathbb{Q}$-Cauchy. Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Soit $\mathbb{N}' \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N'+1} < \frac{1}{3}\varepsilon$. Comme la suite a est une suite de Cauchy, il existe $N'' \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m, n \geq N''$,

$$|a_m - a_n| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$$

Soit $N = \max(N', N'')$. Soient $m, n \geq N$. On a

$$\begin{array}{rcl} |r_n - r_m| & = & |(r_n - a_n) + (a_n - a_m) + (a_m - r_m)| \\ & \leq & |r_n - a_n| + |a_n - a_m| + |a_m - r_m| \\ & \leq & \dfrac{1}{3}\varepsilon + \dfrac{1}{3}\varepsilon + \dfrac{1}{3}\varepsilon \\ & = & \varepsilon \end{array}$$

Ainsi, la suite r est $\mathbb{Q}$-Cauchy. Par la proposition 37, elle converge donc vers le réel $\ell = [r]$. Montrons que la suite a converge vers ℓ.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, $|r_n - \ell| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Soit $N'' \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N''+1} \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Soit $N = \max(N', N'')$. On a alors pour tout $n \geq N$,

$$\begin{array}{rcl} |a_n - \ell| & = & |(a_n - r_n) + (r_n - \ell)| \\ & \leq & |a_n - r_n| + |r_n - \ell| \\ & \leq & \dfrac{1}{2}\varepsilon + \dfrac{1}{2}\varepsilon \\ & = & \varepsilon \end{array}$$

□

Pour résumer tout ce qui précède, on a le théorème suivant.

Théorème 39. *$\mathbb{R}$ est un corps ordonné archimédien complet.*

7.3 Suites monotones

Parlons un peu de suites monotones. Le résultat ci-dessous est valable dans n'importe quel corps ordonné archimédien complet. Cela dit, d'ici la fin de cet article, nous saurons qu'il n'existe pas beaucoup de tels corps ...

Proposition 40. *Soit $\mathbb{K}$ un corps ordonné archimédien complet. Toute suite croissante et majorée d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente.*

Démonstration. Soit a une suite croissante d'éléments de $\mathbb{K}$. Supposons que la suite a n'est pas de Cauchy. Il existe donc $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $m, n \geq N$ tels que $|a_m - a_n| > \varepsilon$. Par la croissance de a, il existe donc $n \geq m \geq N$ tels que

$$a_n > a_m + \varepsilon \geq a_N + \varepsilon$$

Posons $n_0 = 0$. Puis pour tout $k \in \mathbb{N}$, en prenant $N = n_k$ ci-dessus, soit $n_{k+1} > n_k$ tel que

$$a_{n_{k+1}} > a_{n_k} + \varepsilon$$

Par une récurrence immédiate, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{n_k} \geq a_0 + k\varepsilon$$

Il en résulte, par la propriété d'Archimède, que a n'est pas majorée.

En contraposant, on obtient donc que si a est une suite croissante et majorée d'éléments de $\mathbb{K}$, alors la suite a est de Cauchy, et donc converge. □

Bien entendu (par exemple par un passage à l'opposé), toute suite décroissante et minorée de réels converge.

Définition 12. Soient a et b deux suites à valeurs dans un corps ordonné. Les suites a et b sont *adjacentes* si

- L'une croît.
- L'autre décroît.
- Leur différence tend vers 0.

Proposition 41. *Soit $\mathbb{K}$ un corps ordonné archimédien complet. Soient a et b deux suites adjacentes d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors a et b convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{K}$. En supposant par exemple a croissante et b décroissante, on a de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$a_n \leq \ell \leq b_n$$

Démonstration. Supposons pour fixer les idées a croissante et b décroissante. Supposons un instant qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_N > b_N$. On a alors pour tout $n \geq N$,

$$a_n \geq a_N > b_N \geq b_n$$

et donc

$$a_n - b_n \geq a_N - b_N$$

En passant à la limite, on obtient $0 \leq a_N - b_N$, contradiction. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$. La suite b étant décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq b_0$ et donc aussi $a_n \leq b_0$. Ainsi, la suite a est croissante et majorée par b_0, donc convergente. Notons ℓ sa limite. De même, la suite b converge vers un réel ℓ'. Comme $a - b$ tend vers 0, on en déduit que $\ell = \ell'$.

Pour tous entiers naturels $n \leq m$, on a, comme la suite a est croissante, $a_n \leq a_m$. De là, en faisant tendre m vers l'infini, $a_n \leq \ell$. De même, $\ell \leq b_n$. □

8 Parties de $\mathbb{R}$

Beaucoupe de cours d'Analyse caractérisent le corps des réels par le fait que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. Nous ne pouvons pas passer cela sous silence.

Proposition 42. *Soit $\mathbb{K}$ un corps ordonné archimédien complet. Toute partie de $\mathbb{K}$ non vide et majorée possède une borne supérieure.*

Nous allons montrer ce résultat en plusieurs étapes.

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{K}$. Notons B l'ensemble des majorants de A. Remarquons que B est non vide, car A est majorée.

Soit $x_0 \in A$. Soit $y_0 \in B$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, supposant définis x_n et y_n, soit $m_n = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$.

- Si $m_n \in B$, on pose $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = m_n$.
- Sinon, m_n ne majore pas A. On prend alors pour x_{n+1} un élément de A supérieur à m_n et $y_{n+1} = y_n$.

Une récurrence facile montre que

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in B$.
- La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

De plus, comme B est l'ensemble des majorants de A, on a pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $x_m \leq y_n$.

Lemme 43. *Les suites x et y sont adjacentes.*

Démonstration. Il reste juste à prouver que $x - y$ tend vers 0. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n - x_n \leq \frac{y_0 - x_0}{2^n}$$

C'est évident pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons l'inégalité vérifiée par x_n et y_n. En reprenant les notations vues plus haut, deux cas surviennent.

- Si $m_n \in B$, alors
$$y_{n+1} - x_{n+1} = m_n - x_n = \frac{1}{2}(y_n - x_n) \leq \frac{1}{2^{n+1}}(y_0 - x_0)$$
- Si $m_n \in B$, alors $m_n \leq x_{n+1}$ et
$$y_{n+1} - x_{n+1} = y_n - x_{n+1} \leq y_n - m_n = \frac{1}{2}(y_n - x_n) \leq \frac{1}{2^{n+1}}(y_0 - x_0)$$

Rappelons que l'on a aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq y_n - x_n$. Comme $\frac{1}{2^n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, il en résulte que $y_n - x_n$ tend aussi vers 0. □

Les suites x et y étant adjacentes, elles convergent toutes deux vers une même limite $\ell \in \mathbb{K}$.

Nous voici arrivés.

Lemme 44. *ℓ est la borne supérieure de A.*

Démonstration. Soit $a \in A$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$. Comme la suite b tend vers ℓ, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b_n \leq \ell + \varepsilon$. Or, b_n majore A, donc $a \leq b_n \leq \ell + \varepsilon$ et donc $a \leq \ell + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $a \leq \ell$. Ainsi, ℓ majore A et donc $\ell \in B$.

Soit $b \in B$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$. Comme la suite a tend vers ℓ, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon \leq a_n$. Or, b majore A, donc $\ell - \varepsilon \leq a_n \leq b$ et donc $\ell - \varepsilon \leq b$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\ell \leq b$. Ainsi, ℓ est le plus petit élément de B. □

9 L'unicité de $\mathbb{R}$

Une remarque anodine faite un peu plus haut disait qu'il n'existe pas beaucoup de corps ordonnés archimédiens complet. En fait, il n'en existe qu'un, à isomorphisme près.

9.1 Le théorème

Théorème 45. *Soit $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$ un corps ordonné. On a équivalence entre*

(i) *$\mathbb{K}$ est archimédien et complet.*

> (*ii*) *Toute partie de $\mathbb{K}$ non vide et majorée possède une borne supérieure.*
> (*iii*) *Il existe un unique isomorphisme de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{R}$.*

Nous avons pris soin, dans ce qui précède, de bien distinguer les propriétés spécifiques aux réels et à la façon dont les réels ont été construits, et les propriétés vraies dans tout corps ordonné. Ainsi, nous avons déjà prouvé que $(i) \implies (ii)$. Par ailleurs, nous avons prouvé que $\mathbb{R}$ vérifie (i) (et aussi (ii)). Ces deux propriétés se conservent par isomorphisme (nous nous dispenserons de le vérifier), et donc $(iii) \implies (i)$.

Il reste donc à vérifier, par exemple, que $(ii) \implies (i)$ et $(i) \implies (iii)$.

9.2 $(ii) \implies (i)$

Donnons nous un corps ordonné $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$ dont toute partie non vide et majorée possède une borne supérieure.

> **Proposition 46.** $\mathbb{K}$ *est archimédien.*

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{K}_+^*$. Supposons que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $mx \leq y$. Considérons l'ensemble

$$E = \{mx : m \in \mathbb{N}\}$$

L'ensemble E est une partie de $\mathbb{K}$ non vide et majorée par y. E possède donc une borne supérieure α. Comme $\alpha - x < \alpha$, $\alpha - x$ ne majore pas E. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$mx > \alpha - x$$

De là,

$$(m+1)x > \alpha$$

Or, $(m+1)x \in E$, ce qui contredit le fait que α majore E. □

> **Proposition 47.** *Toute suite croissante et majorée d'éléments de $\mathbb{K}$ converge.*

Démonstration. Soit a une suite croissante et majorée d'éléments de $\mathbb{K}$. Considérons l'ensemble

$$E = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

L'ensemble E est une partie de $\mathbb{K}$ non vide et majorée. E possède donc une borne supérieure ℓ. Soit $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$. On a $\ell - \varepsilon < \ell$; et donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon < a_N$. Soit $n \geq N$. Par la croissance de a, on a

$$\ell - \varepsilon < a_N \leq a_n$$

De plus, ℓ majore E et donc

$$a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$,

$$|a_n - \ell| \leq \varepsilon$$

La suite a converge donc vers ℓ. $\square$

Proposition 48. [Théorème de Bolzano-Weierstrass]

Soit a une suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}$. Il existe une suite extraite de a qui converge.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$E_n = \{a_m : m \geq n\}$$

est une partie de $\mathbb{K}$ non vide et majorée. E_n possède donc une borne supérieure u_n.

Montrons que u est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $E_{n+1} \subseteq E_n$, et donc

$$u_{n+1} = \sup E_{n+1} \leq \sup E_n = u_n$$

L'ensemble E est minoré par un élément M de $\mathbb{K}$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq M$. Ainsi, la suite u est convergente. Notons $\overline{\ell}$ sa limite.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$. Comme u décroît vers ℓ, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\ell \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$. On a donc pour tout $n \geq N$, pour tout $m \geq n$,

$$a_m \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$$

Par ailleurs comme u_n est la borne supérieure de E, il existe $m \geq n$ tel que $a_m \geq u_n - \varepsilon$. Résumons nous :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{K}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \exists m \geq n, |a_m - \ell| \leq \varepsilon$$

En d'autres termes, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$, il existe une infinité d'entiers m tels que $|a_m - \ell| \leq \varepsilon$.

Construisons maintenant par récurrence sur k une suite strictement croissante d'entiers naturels $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Par le résultat précédent, il existe un entier n_0 tel que

$$|a_{n_0} - \ell| \leq \varepsilon$$

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$. Supposons construit $n_k \in \mathbb{N}$ tel que

$$|a_{n_k} - \ell| \leq \frac{1}{2^k}$$

On applique le résultat précédent à $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$ pour construire un entier $n_{k+1} > n_k$ tel que

$$|a_{n_{k+1}} - \ell| \leq \frac{1}{2^{k+1}}$$

La suite $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de a, et comme $\frac{1}{2^k}$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini, cette suite tend vers ℓ. $\square$

Proposition 49. $\mathbb{K}$ *est complet.*

Démonstration. Soit a une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$. La suite a est bornée. Il existe donc une suite $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ extraite de a qui converge vers $\ell \in \mathbb{K}$. Montrons que la suite a converge vers ℓ. Pour cela, donnons-nous $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$. Il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K$, $|a_{n_k} - \ell| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Par ailleurs, la suite a étant de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m, n \geq N$, $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$.

Donnons nous un entier $k \geq K$ tel que $n_k \geq N$. En prenant $m = n_k$ ci-dessus, on a pour tout $n \geq N$,

$$|a_n - \ell| \leq |a_n - a_m| + |a_m - \ell| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Ainsi, a tend vers ℓ. □

9.3 $(i) \implies (iii)$

Donnons-nous deux corps ordonnés archimédiens complets $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$ et $(\mathbb{L}, +, \times, \leq)$. Les rationnels vont jouer un rôle important dans la suite. Notons

$$\mathbb{Q}_\mathbb{K} = \{r1_\mathbb{K} : r \in \mathbb{Q}\}$$

l'ensemble des « rationnels de $\mathbb{K}$ ». De même, notons $\mathbb{Q}_\mathbb{L}$ l'ensemble des multiples rationnels de $1_\mathbb{L}$.

Lemme 50. *Soit* $\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ *un morphisme de corps. On a pour tout* $r \in \mathbb{Q}$, $\varphi(r1_\mathbb{K}) = r1_\mathbb{L}$.

Démonstration. φ est un morphisme de groupes additifs. On a donc pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{K}$, $\varphi(ax) = a\varphi(x)$. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Posons $r = \frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$. On a

$$br1_\mathbb{K} = a1_\mathbb{K}$$

De là,

$$b\varphi(r1_\mathbb{K}) = \varphi(a1_\mathbb{K}) = a\varphi(1_\mathbb{K}) = a1_\mathbb{L}$$

d'où le résultat en divisant par b. □

Lemme 51. *Soit* $\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ *un morphisme de corps. La fonction* φ *est strictement croissante.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{K}_+^*$. Comme $\mathbb{K}$ est complet, x possède une racine carrée t dans $\mathbb{K}$. On a alors

$$\varphi(x) = \varphi(t^2) = \varphi(t)^2 > 0$$

Soient maintenant $x, y \in \mathbb{K}$. Supposons $x < y$. On a alors, puisque $y - x > 0$,

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \varphi(y - x) > 0$$

et donc $\varphi(x) < \varphi(y)$. $\square$

Lemme 52. *Soit $\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ un morphisme de corps. Soit a une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{K}$. Alors la suite $(\varphi(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi(\ell)$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon \in \mathbb{L}_+^*$. Soit $r \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $r1_\mathbb{L} \leq \varepsilon$. Un tel r existe car $\mathbb{L}$ est archimédien, et donc $\mathbb{Q}_\mathbb{L}$ est dense dans $\mathbb{L}$. Comme a tend vers ℓ, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $-r1_\mathbb{K} \leq a_n - \ell \leq r1_\mathbb{K}$. Par la croissance de φ, on a pour tout $n \geq N$,

$$-\varphi(r1_\mathbb{K}) \leq \varphi(a_n) - \varphi(\ell) \leq \varphi(r1_\mathbb{K})$$

Comme r est rationnel, $\varphi(r1_\mathbb{K}) = r1_\mathbb{L}$, et donc, pour tout $n \geq N$,

$$-r1_\mathbb{L} \leq \varphi(a_n) - \varphi(\ell) \leq r1_\mathbb{L}$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$,

$$|\varphi(a_n) - \varphi(\ell)| \leq r1_\mathbb{L} \leq \varepsilon$$

La suite $(\varphi(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $\varphi(\ell)$. $\square$

Proposition 53. *Il existe au plus un morphisme de corps de $\mathbb{K}$ vers $\mathbb{L}$.*

En particulier, en prenant $\mathbb{L} = \mathbb{R}$, on a le résultat ci-dessous.

Théorème 54. *Soit $\mathbb{K}$ un corps ordonné archimédien complet. Il existe au plus un isomorphisme de corps de $\mathbb{K}$ vers $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ un morphisme de corps. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels telle que $(r_n1_\mathbb{K})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x. Alors, la suite $(r_n1_\mathbb{L})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\varphi(x)$. On a donc

$$\varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} r_n1_\mathbb{L}$$

On en déduit l'unicité de φ. $\square$

Nous allons maintenant prouver l'existence d'un isomorphisme de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{L}$.

Lemme 55. *Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels telle que $(r_n1_\mathbb{K})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Alors, la suite $(r_n1_\mathbb{L})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.*

Démonstration. Comme $\mathbb{L}$ est complet, il suffit de prouver que cette suite est une suite de Cauchy. On a pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,

$$|r_m1_\mathbb{K} - s_m1_\mathbb{K}| = |r_m - s_m||1_\mathbb{K}| = |r_m - s_m|$$

La suite $(r_n1_\mathbb{K})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc de Cauchy. Il en résulte, par l'égalité précédente, que la suite de rationnels r est aussi de Cauchy.

Remarquons que

$$|r_m 1_{\mathbb{L}} - s_m 1_{\mathbb{L}}| = |r_m - s_m|$$

Il en résulte que la suite $(r_n 1_{\mathbb{L}})_{n\in\mathbb{N}}$ est également de Cauchy. Comme $\mathbb{L}$ est complet, cette suite converge. $\square$

Lemme 56. *Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite de rationnels telles que $(r_n 1_{\mathbb{K}})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n 1_{\mathbb{K}})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite. Alors, les suites $(r_n 1_{\mathbb{L}})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n 1_{\mathbb{L}})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi vers une même limite.*

Démonstration. Soit ℓ la limite commune des suites $(r_n 1_{\mathbb{K}})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n 1_{\mathbb{K}})_{n\in\mathbb{N}}$. Soient ℓ' et ℓ'' les limites des suites $(r_n 1_{\mathbb{L}})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n 1_{\mathbb{L}})_{n\in\mathbb{N}}$. Ces deux limites existent par le lemme précédent. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|r_n 1_{\mathbb{L}} - s_n 1_{\mathbb{L}}| = |r_n 1_{\mathbb{K}} - s_n 1_{\mathbb{K}}|$$

En passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient

$$|\ell' - \ell''| = 0$$

d'où $\ell' = \ell''$. $\square$

Grâce aux deux lemmes précédents, nous pouvons définir une application $\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ comme suit. Comme $\mathbb{K}$ est archimédien, pour tout $x \in \mathbb{K}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(r_n 1_{\mathbb{K}})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x. La suite $(r_n 1_{\mathbb{L}})_{n\in\mathbb{N}}$ est alors convergente, et sa limite ne dépend pas de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie. On appelle $\varphi(x)$ la limite en question.

Proposition 57. *φ est un isomorphisme de corps.*

Démonstration.

- La suite constante égale à $1_{\mathbb{K}}$ tend vers 1_K, et la suite constante égale à $1_{\mathbb{L}}$ tend vers $1_{\mathbb{L}}$. On a donc $\varphi(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{L}}$.
- Soient $x, y \in \mathbb{K}$. Soient r et s deux suites de rationnels telles que les suites $(r_n 1_{\mathbb{K}})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n 1_{\mathbb{K}})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent respectivement vers x et y. La suite $(r_n 1_{\mathbb{K}} + s_n 1_{\mathbb{K}})_{n\in\mathbb{N}}$ tend alors vers $x + y$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= \lim_{n\to\infty} (r_n 1_{\mathbb{L}} + s_n 1_{\mathbb{L}}) \\
&= \lim_{n\to\infty} r_n 1_{\mathbb{L}} + \lim_{n\to\infty} s_n 1_{\mathbb{L}} \\
&= \varphi(x) + \varphi(y)
\end{aligned}$$

- De même, pour tous $x, y \in \mathbb{K}$, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.
- Soit $y \in \mathbb{L}$. Comme $\mathbb{L}$ est archimédien, il existe une suite r de rationnels tels que $(r_n 1_{\mathbb{L}})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers y. Cette suite est convergente, c'est donc une suite de Cauchy. On en déduit facilement que la suite r est aussi de Cauchy, puis que la suite $(r_n 1_{\mathbb{K}})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$. Comme $\mathbb{K}$ est complet, la suite $(r_n 1_{\mathbb{K}})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite $x \in \mathbb{K}$. On a alors $\varphi(x) = y$. Ainsi, φ est surjective.

□

En prenant $\mathbb{L} = \mathbb{R}$, on obtient ainsi le résultat attendu.

Théorème 58. *Soit* $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$ *un corps ordonné archimédien complet. Il existe un isomorphisme de* $\mathbb{K}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Notons pour terminer que l'unique isomorphisme de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{R}$ possède une propriété remarquable.

Proposition 59. *Soit* $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$ *un corps ordonné archimédien complet. Soit* φ *l'unique isomorphisme de* $\mathbb{K}$ *sur* $\mathbb{R}$. φ *est une isométrie : pour tous* $x, y \in \mathbb{K}$,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|$$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{K}$. Soient r et s deux suites de rationnels telles que $(r_n 1_{\mathbb{K}})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n 1_{\mathbb{K}})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers x et y. Comme nous l'avons déjà vu plus haut, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|r_n 1_{\mathbb{L}} - s_n 1_{\mathbb{L}}| = |r_n 1_{\mathbb{K}} - s_n 1_{\mathbb{K}}|$$

En passant à la limite, on obtient le résultat. □