Chaos

Marc Lorenzi

9 mars 2023

1 Qu'est-ce que le chaos ?

1.1 Systèmes dynamiques discrets

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow I$. Le *système dynamique engendré par* f est l'ensemble

$$\mathcal{S}_f = \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$$

où $f^0 = id_I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f^n \circ f$. Pour tout $a \in I$, *l'orbite de* a pour le système $\mathcal{S}_f$ est l'ensemble

$$\mathcal{O}_{\mathcal{S}_f}(a) = \{f^n(a) : n \in \mathbb{N}\}$$

Étudier le système dynamique $\mathcal{S}_f$ c'est, entre autres, étudier le comportement des orbites. Dans cet article, nous nous intéresserons aux *propriétés* des systèmes dynamiques, plus qu'à leur *étude*. Plus précisément, nous allons détailler les propriétés qui font qu'un système dynamique est compliqué.

Dans toute cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est une application de I vers I. Nous noterons $\mathcal{S}$ le système dynamique engendré par f.

1.2 Sensibilité aux conditions initiales

Pour tout réel $a \in I$, nous noterons

$$\mathcal{V}_I(a) = \{[a - \alpha, a + \alpha] \cap I : \alpha > 0\}$$

Un élément de $\mathcal{V}_I(a)$ est un *voisinage* de a dans I.

Définition 1. Soit $\delta > 0$. Soit $a \in I$. $\mathcal{S}$ est *δ-sensible aux conditions initiales* au point a lorsqu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall V \in \mathcal{V}_I(a), \exists x \in V, \exists k \in \mathbb{N}, |f^k(x) - f^k(a)| \geq \delta$$

$\mathcal{S}$ est sensible aux conditions initiales en a lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que $\mathcal{S}$ soit δ-sensible aux conditions initiales en a.

Enfin, $\mathcal{S}$ est sensible aux conditions initiales lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $a \in I$, $\mathcal{S}$ soit δ-sensible aux conditions initiales en a.

De façon informelle, le réel δ mesure l'imprévisibilité du système $\mathcal{S}$. Si je connais a de façon approchée, aussi bonne que soit l'approximation, je ne pourrai connaître l'orbite de a qu'à δ près. Une conséquence en est qu'il est *impossible* de faire des simulations numériques fiables sur un système sensible aux conditions initiales.

1.3 Transitivité topologique

Définition 2. $\mathcal{S}$ est *topologiquement transitif* lorsque pour tous $a, a' \in I$, pour tous $U \in \mathcal{V}_I(a)$ et $U' \in \mathcal{V}_I(a')$,

$$\exists k \in \mathbb{N}, f^k(U) \cap U' \neq \emptyset$$

La transitivité topologique traduit le fait que le système dynamique $\mathcal{S}$ possède la capacité de *mélange*. En choisissant convenablement un point $x \in U$, l'orbite de x contient toujours un point de U', et ceci quel que soit U'.

1.4 Points périodiques

Définition 3. Soit $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle *période* de a tout entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(a) = a$.

Nous noterons $\mathcal{T}(a)$ l'ensemble des périodes de a.

Définition 4. Soit $a \in I$. a est un *point périodique* de $\mathcal{S}$ lorsque a possède une période non nulle. La plus petite période non nulle de a est sa *période primitive*.

Proposition 1. *Soit $a \in I$. Il existe unique un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\mathcal{T}(a) = n_0\mathbb{N}$$

On a $n_0 \neq 0$ si et seulement si a est périodique. Dans ce cas, n_0 est la période primitive de a.

Démonstration. Si a n'est pas périodique, le résultat est évident puisque $\mathcal{T}(a) = \{0\} = 0\mathbb{N}$. Supposons donc a périodique. Soit n_0 la période primitive de a.

Montrons par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$, kn_0 est encore une période de a. C'est évident si $k = 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que kn_0 est une période de a. On a alors

$$\begin{aligned} f^{(k+1)n_0}(a) &= f^{n_0}(f^{kn_0}(a)) \\ &= f^{n_0}(a) \\ &= a \end{aligned}$$

Ainsi, $(k+1)n_0$ est une période de a.

Inversement, soit n une période de a. Effectuons la division euclidienne de n par n_0. On a $n = kn_0 + r$ où $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < n_0$. On a

$$\begin{aligned} a &= f^n(a) \\ &= f^r(f^{kn_0}(a)) \\ &= f^r(a) \end{aligned}$$

Ainsi, r est une période de a. Mais $r < n_0$ et n_0 est la plus petite période non nulle de a. On en déduit que $r = 0$ et donc $n = kn_0 \in n_0\mathbb{N}$.

L'unicité est évidente, car si $n_0\mathbb{N} = n_0'\mathbb{N}$ alors, n_0 divise n_0' et n_0' divise n_0. De là, $n_0 = n_0'$. $\square$

1.5 Systèmes chaotiques

Définition 5. Le système dynamique $\mathcal{S}$ est *chaotique* lorsqu'il est sensible aux conditions initiales, topologiquement transitif et que l'ensemble des points périodiques de $\mathcal{S}$ est dense dans I.

Il n'est pas évident du tout qu'il existe des systèmes chaotiques. Dans la section suivante, nous allons en voir un exemple. La route est longue, mais elle est droite : se donner une fonction f judicieuse, puis montrer que $\mathcal{S}$ satisfait aux trois conditions du chaos.

2 Un exemple de système chaotique

Nous considérons dans cette section la fonction *tente* étudiée dans l'article précédent. Rappelons qu'il s'agit de la fonction $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ définie par

- $f(x) = 2x$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$.
- $f(x) = 2(1-x)$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Nous notons $\mathcal{S}$ le système dynamique engendré par f.

2.1 Points périodiques denses

Proposition 2. *L'ensemble des points périodiques de $\mathcal{S}$ est dense dans* $[0,1]$.

Démonstration. Soit $a \in [0,1]$. Soit $n \geq 1$. Soient $a_1, \ldots, a_n$ les n premiers chiffres d'un développement dyadique de a. Soit

$$x = 0.\overline{a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_n}$$

où $b_i = a_i \oplus a_n$. Le point x est périodique, n est une période de x, et

$$|x - a| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

Il existe donc des points périodiques de $\mathcal{S}$ aussi proches de a que l'on désire. $\square$

2.2 Sensibilité aux conditions initiales

Proposition 3. *Le système dynamique $\mathcal{S}$ est sensible aux conditions initiales.*

Démonstration. Soit $x \in [0,1]$. Supposons tout d'abord $x \neq 1$. Soit $n \geq 1$ assez grand pour que l'on ait

$$y = x + \frac{1}{2^{n+1}} \leq 1$$

En choisissant, dans le cas où $x \in \mathbb{D}$ (et donc, y aussi) le « bon » développement dyadique de x et y, on a $y_n = x_n$ et $y_{n+1} = x_{n+1} \oplus 1$. On a alors

$$(f^n(y))_1 = y_{1+n} \oplus y_n = x_{n+1} \oplus 1 \oplus x_n = (f^n(x))_1 \oplus 1$$

Ainsi, les premiers chiffres des développements dyadiques de $f^n(x)$ et $f^n(y)$ sont différents. De là,

$$|f^n(y) - f^n(x)| \geq \frac{1}{2}$$

Le cas où $x = 1$ se traite par exemple en remarquant que $f(1) = 0$. On est alors ramenés au cas où $x = 0$. $\square$

2.3 Transitivité topologique

Proposition 4. *La système dynamique $\mathcal{S}$ est topologiquement transitif.*

Démonstration. Soient $a, b \in [0,1]$. Supposons $a, b \neq 0, 1$. Soit $n \geq 1$. Soit

$$x = 0.a_1 \ldots a_n 0 b_1 b_2 \ldots$$

Remarquons que $x_{n+1} = 0$. On a donc

$$f^{n+1}(x) = [x_{k+n+1}]_{k \geq 1} = [b_k]_{k \geq 1} = b$$

On peut donc trouver des réels x aussi proches de a qu'on le désire et tels qu'une puissance judicieuse de f appliquée à x soit égale à b, et donc, appartienne à tout voisinage de b. $\square$

2.4 Conclusion

Proposition 5. *Le système dynamique $\mathcal{S}$ est chaotique.*

3 Systèmes dynamiques isomorphes

3.1 Introduction

Soient $f : I \longrightarrow I$ et $g : J \longrightarrow J$. Imaginons que nous sachions que le système dynamique $\mathcal{S}_f$ est chaotique. Peut-on en déduire que le système $\mathcal{S}_g$ est aussi chaotique ? Définissons le concept d'isomorphisme de systèmes.

Définition 6. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \longrightarrow I$ et $g : J \longrightarrow J$. Soit $\varphi : I \longrightarrow J$ une bijection continue. La fonction φ est un *isomorphisme* de $\mathcal{S}_f$ sur $\mathcal{S}_g$ si

$$g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

Les systèmes $\mathcal{S}_f$ et $\mathcal{S}_g$ sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de $\mathcal{S}_f$ sur $\mathcal{S}_g$.

Remarque. Par un résultat classique d'analyse, la bijection φ de la définition est strictement monotone, et sa réciproque est aussi continue, et strictement monotone, de même sens de variation que φ.

Remarquons que la relation entre f et g se transporte à leurs puissances.

Proposition 6. *Avec les notations de la définition, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$g^n = \varphi \circ f^n \circ \varphi^{-1}$$

Démonstration. Faisons une récurrence sur n. Tout d'abord,

$$\varphi \circ f^0 \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ id_I \circ \varphi^{-1} = id_J = g^0$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $g^n = \varphi \circ f^n \circ \varphi^{-1}$. On a alors

$$g^{n+1} = g^n \circ g = \varphi \circ f^n \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ f^{n+1} \circ \varphi^{-1}$$

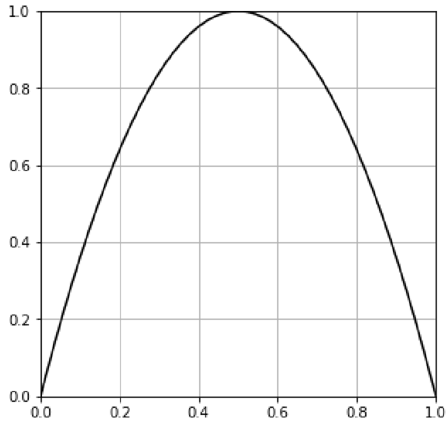
□

3.2 Un exemple

Reprenons la tente $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ de la section précédente. Soit $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ définie par

$$g(x) = 4x(1-x)$$

La fonction g est appelée dans la littérature la *fonction logistique*. La courbe de g est un morceau de parabole.

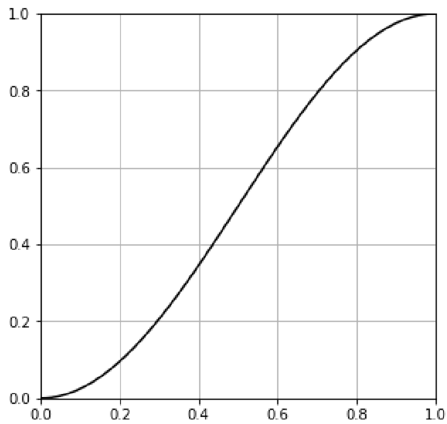


> **Proposition 7.** *Les systèmes $\mathcal{S}_f$ et $\mathcal{S}_g$ sont isomorphes.*

Démonstration. Soit $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ définie par

$$\varphi(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{2}$$

La fonction φ est continue et bijective. Voici son graphe.



Sa réciproque vérifie pour tout $x \in [0,1]$,

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$$

Soit $x \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned} g(\varphi(x)) &= 4\sin^2 \frac{\pi x}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\pi x}{2}\right) \\ &= 4\sin^2 \frac{\pi x}{2} \cos^2 \frac{\pi x}{2} \\ &= \sin^2 \pi x \end{aligned}$$

Calculons maintenant $\varphi(f(x))$.

- Si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, on a
$$\varphi(f(x)) = \varphi(2x)$$
- Si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, on a
$$\varphi(f(x)) = \varphi(2(1-x)) = \sin^2(\pi - \pi x) = \sin^2 \pi x$$

Ainsi,
$$g \circ \varphi = \varphi \circ f$$
et donc
$$g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$$
□

3.3 Le théorème

Venons-en au théorème central de cette section. Nous pourrions rêver à la proposition suivante.

Proposition 8. *Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux systèmes dynamiques isomorphes. Alors*
$$\mathcal{S} \text{ est chaotique} \iff \mathcal{S}' \text{ est chaotique}$$

Nous allons occuper le reste de cette section à la preuve de ce théorème. Nous verrons toutefois que nous aurons besoin pour la sensibilité aux conditions initiales de supposer que I et J sont des *segments.*

Dans toute la suite, I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose données deux fonctions $f : I \longrightarrow I$ et $g : J \longrightarrow J$, ainsi qu'une bijection continue $\varphi : I \longrightarrow J$ telle que
$$g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

3.4 Conservation des points périodiques

Proposition 9. *Soit $x \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$. n est une période de x pour le système $\mathcal{S}_f$ si et seulement si n est une période de $\varphi(x)$ pour le système $\mathcal{S}_g$.*

Démonstration. Supposons $f^n(x) = x$. Soit $y = \varphi(x)$. On a
$$g^n(y) = \varphi(f^n(\varphi^{-1}(\varphi(x)))) = \varphi(f^n(x)) = \varphi(x) = x$$
La preuve de la réciproque est identique. □

Remarquons comme conséquence immédiate de ce résultat que pour tout $x \in I$,
$$\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(\varphi(x))$$

La fonction φ établit donc une bijection entre les points périodiques de $\mathcal{S}_f$ et les points périodiques de $\mathcal{S}_g$. Mieux, elle envoie un point de période primitive donnée sur un point de même période primitive.

Proposition 10. *Si l'ensemble des points périodiques de $\mathcal{S}_f$ est dense dans I, alors l'ensemble des points périodiques de $\mathcal{S}_g$ est dense dans J.*

Démonstration. Soient $\mathcal{P}_f$ et $\mathcal{P}_g$ les ensembles des points périodiques de $\mathcal{S}_f$ et $\mathcal{S}_g$. Supposons $\mathcal{P}_f$ dense dans I. Soit $y \in J$. Soit $x = \varphi^{-1}(y)$. Par la densité de $\mathcal{P}_f$ dans I, x est la limite d'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de $\mathcal{P}_f$. De là, par la continuité de φ en x, $y = \varphi(x)$ est la limite de la suite $(\varphi(x_n))_{n\geq 0}$, qui est une suite de points de $\varphi(\mathcal{P}_f)$. Mais nous avons vu que $\varphi(\mathcal{P}_f) = \mathcal{P}_g$. Ainsi, $\mathcal{P}_g$ est dense dans J. $\square$

3.5 Sensibilité aux conditions initiales

Proposition 11. *On suppose que I est un segment. Soit $a \in I$. Soit $b = \varphi(a)$. Si $\mathcal{S}_f$ est sensible aux conditions initiales en a, alors $\mathcal{S}_g$ est sensible aux conditions initiales en b.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que La fonction φ étant continue et injective, elle est strictement monotone. Nous allons traiter le cas où φ est strictement croissante (le cas où φ décroît se traite de façon analogue). Remarquons également que l'image d'un segment par une fonction continue étant un segment, J est aussi un segment.

Soit $\delta > 0$ tel que

$$\forall U \in \mathcal{V}_I(a), \exists x \in U, \exists k \in \mathbb{N}, |f^k(x) - f^k(a)| \geq \delta$$

Soit $V \in \mathcal{V}_J(b)$. Par la continuité de φ en a, il existe $U \in \mathcal{V}_I(a)$ tel que $\varphi(U) \subset V$. Soient $x \in U$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $|f^k(x) - f^k(a)| \geq \delta$. Supposons par exemple $f^k(x) \geq f^k(a) + \delta$, (le cas où $f^k(x) \leq f^k(a) - \delta$ se traite de façon analogue). Posons $y = \varphi(x)$. Remarquons que $y \in V$.

On a

$$f^k(a) \leq f^k(a) + \delta \leq f^k(x)$$

Comme $f^k(a)$ et $f^k(x)$ appartiennent à I et que I est un intervalle, il en résulte que $f^k(a) + \delta$ appartient aussi à I. De là, par la croissance de φ,

$$\varphi(f^k(x)) \geq \varphi(f^k(a) + \delta)$$

c'est à dire

$$g^k(y) \geq \varphi(f^k(a) + \delta)$$

et donc

$$g^k(y) - g^k(b) \geq \varphi(f^k(a) + \delta) - \varphi(f^k(a))$$

Rappelons que I est un segment. Posons $I = [m, M]$ où $m < M$. Considérons la fonction $\psi : [m, M - \delta] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(t) = \varphi(t + \delta) - \varphi(t)$. La fonction ψ, continue sur un segment, possède un minimum ε. Par la croissance stricte de φ, ψ prend des valeurs strictement positives. Ainsi, $\varepsilon > 0$. Le réel ε ne dépend ni de y ni de k, et on a

$$g^k(y) - g^k(b) \geq \varepsilon$$

Le système $\mathcal{S}_g$ est donc sensible aux conditions initiales en b. $\square$

3.6 Transitivité topologique

Proposition 12. *Si $\mathcal{S}_f$ est topologiquement transitif, alors $\mathcal{S}_g$ est topologiquement transitif.*

Démonstration. Soient $b, b' \in J$. Posons $a = \varphi^{-1}(b)$ et $a' = \varphi^{-1}(b')$. Soient $V \in \mathcal{V}_J(b)$ et $V' \in \mathcal{V}_J(b')$. Comme la fonction φ est continue en b, il existe $U \in \mathcal{V}_I(a)$ tel que $\varphi(U) \subset V$. De même, il existe $U' \in \mathcal{V}_I(a')$ tel que $\varphi(U') \subset V'$. Le système $\mathcal{S}_f$ est topologiquement transitif. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k(U) \cap U' \neq \emptyset$. De là,

$$\begin{array}{rcl} g^k(V) \cap V' & = & \varphi(f^k(\varphi^{-1}(V))) \cap V' \\ & \supset & \varphi(f^k(U)) \cap \varphi(U') \\ & \supset & (f^k(U) \cap U') \\ & \neq & \emptyset \end{array}$$

$\square$

3.7 Conclusion

Théorème 13. *Soient I et J deux segments de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \longrightarrow I$ et $g : J \longrightarrow J$. On suppose que $\mathcal{S}_f$ et $\mathcal{S}_g$ sont isomorphes. Alors,*

$$\mathcal{S}_f \text{ est chaotique} \iff \mathcal{S}_g \text{ est chaotique}$$