Polytopes réguliers

Marc Lorenzi

16 mars 2023

Tout le monde connaît le cube et le dodécaèdre, qui sont deux des *solides platoniciens*. Tout le monde ou presque sait qu'il existe 5 tels solides. Mais qui sait ce qui se passe en dimension 4 ? Et en dimension 12 ?

On se place dans un espace euclidien E de dimension n ($\mathbb{R}^n$ par exemple). Nous allons dans cet article décrire de façon informelle ce que l'on appelle les *polytopes convexes réguliers* de E. Une description rigoureuse de ce qui va suivre nous entraînerait bien loin, aussi il est important de garder à l'esprit que les « définitions » que nous allons donner sont parfois incomplètes et que les théorèmes ne seront pas prouvés.

1 Introduction

1.1 Qu'est-ce qu'un polytope ?

Définition 1. Un polytope (convexe) est une partie de E qui est *l'enveloppe convexe* d'un ensemble fini de points, c'est à dire la plus petite partie convexe de E contenant ces points.

Nous ne définirons pas dans cet article ce qu'est un polytope non convexe. Aussi, lorsque nous parlerons de polytopes, il s'agira toujours de polytopes *convexes*. Nous noterons Π_n un polytope « générique ».

Lorsque $n \geq 1$, le *bord* d'un polytope est inclus dans un nombre fini d'hyperplans affines. Les intersections de ces hyperplans avec le polytope sont les *faces* du polytope.

Fait essentiel. Les faces d'un polytope Π_n sont des polytopes Π_{n-1} des hyperplans dont nous venons de parler.

Pour être précis, nous devrions parler des $(n-1)$-faces du polytope. Cela nous permet de définir les $(n-2)$-faces, qui sont les faces des faces, puis les $(n-3)$-faces (les faces des faces des faces), etc., pour arriver aux 1-faces, appelées aussi les *arêtes*, et aux 0-faces qui sont les *sommets*. Histoire d'être complets, nous dirons aussi qu'un polytope Π_n a une unique n-face, qui est lui-même. On définit donc les k-faces d'un polytope Π_n pour $0 \leq k \leq n$.

Exemples.

- $n = 0$. Le singleton $\{0\}$ est l'unique polytope Π_0. Il a un sommet et n'a pas de k-face, ceci pour tout $k \geq 1$.
- $n = 1$. Les polytopes Π_1 sont les segments. Ils possèdent tous deux sommets et une arête.
- $n = 2$. Les polytopes Π_2 sont appelés plus couramment les *polygones*.
- $n = 3$. Les polytopes Π_3 sont appelés des *polyèdres*.

Les *sommets* d'un polytope sont ses « points extrémaux » : ce sont les points du polytope qui n'appartiennent à aucun intervalle ouvert $]A, B[$, où A et B sont eux-même des points du polytope. On peut également définir la notion de sommet par récurrence sur n :

- Un polytope Π_0 a un unique sommet : son unique point.
- Pour $n \geq 1$, les sommets d'un polytope Π_n sont les sommets de ses faces.

Cette définition récursive nous suggère que les k-faces d'un polytope Π_n auraient également pu être définies de façon récursive. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

- Si $k \leq n - 1$, les k-faces de Π_n sont les k-faces de ses faces.
- Π_n a une unique n-face, qui est lui-même.
- Si $k > n$, Π_n n'a pas de k-face.

Ainsi,

- Π_0 (un point) a une 0-face (lui-même).
- Π_1 (un segment) a deux 0-faces (ses sommets) et une 1-face (lui-même).
- Π_2 (un polygone) à N sommets a N 0-faces (ses sommets), N 1-faces (ses arêtes), et une 2-face (lui-même).
- Π_3 (un polyèdre) à N sommets a N 0-faces (ses sommets), ... 1-faces (ses arêtes), ... 2-faces (ses faces au sens usuel) et une 3-face (lui-même). Notez les points de suspension : nous tombons très vite, lors de l'étude des polytopes, dans des problèmes de dénombrement non triviaux : le nombre de 2-faces d'un dodécaèdre, c'est 12 parce qu'on parle le grec, mais combien a-t-il de sommets ? D'arêtes ?

1.2 Polytopes réguliers

On définit la notion de polytope régulier Π_n par récurrence sur n.

L'unique polytope Π_0 et tous les polytopes Π_1 sont décrétés réguliers. On imagine que le lecteur sait ce qu'est un polygone régulier en dimension 2, mais la définition ci-dessous permet de le définir aussi.

Soit $n \geq 2$. Un polytope Π_n régulier est un polytope ayant

- Des faces qui sont elles-mêmes des polytopes réguliers Π_{n-1} isométriques.
- Des figures de sommets qui sont elles aussi des polytopes réguliers isométriques (mais pas nécessairement isométriques aux faces).

Par « isométriques » il faut comprendre que l'on peut passer de l'un à l'autre par un déplacement (composée d'une rotation et d'une translation).

Qu'appelle-t-on la *figure de sommet* associée au sommet s d'un polytope Π_n ?

Définition 2. La *figure de sommet* associée au sommet s d'un polytope Π_n est le polytope Π_{n-1} dont les sommets sont les milieux des arêtes ayant s pour extrémité.

Remarquons que pour que cette définition ait un sens, il faut que les milieux des arêtes ayant s pour extrémité soient tous dans un même hyperplan. Nous n'entrerons pas dans les détails ici.

Exemple. Prenons $n = 3$. Un cube est un polyèdre régulier :

- Ses faces sont des carrés isométriques.
- Ses figures de sommets sont des triangles équilatéraux isométriques.

2 La dimension 3

En dimension 3, on parle de polyèdres. Un polyèdre régulier Π_3 est caractérisé par deux entiers $p, q \geq 3$.

- Les faces du polyèdre sont des polygones réguliers à p sommets.
- Les figures de sommet sont des polygones réguliers à q sommets.

Remarquons que cela entraîne qu'il y a exactement q faces qui se rencontrent à chaque sommet. On peut montrer que

$$\left(\pi - \frac{2\pi}{p}\right) q < 2\pi$$

d'où on tire facilement

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Quelles sont les valeurs possibles de p ? En supposant un court instant $p \geq 6$, on obtient

$$\frac{1}{q} > \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

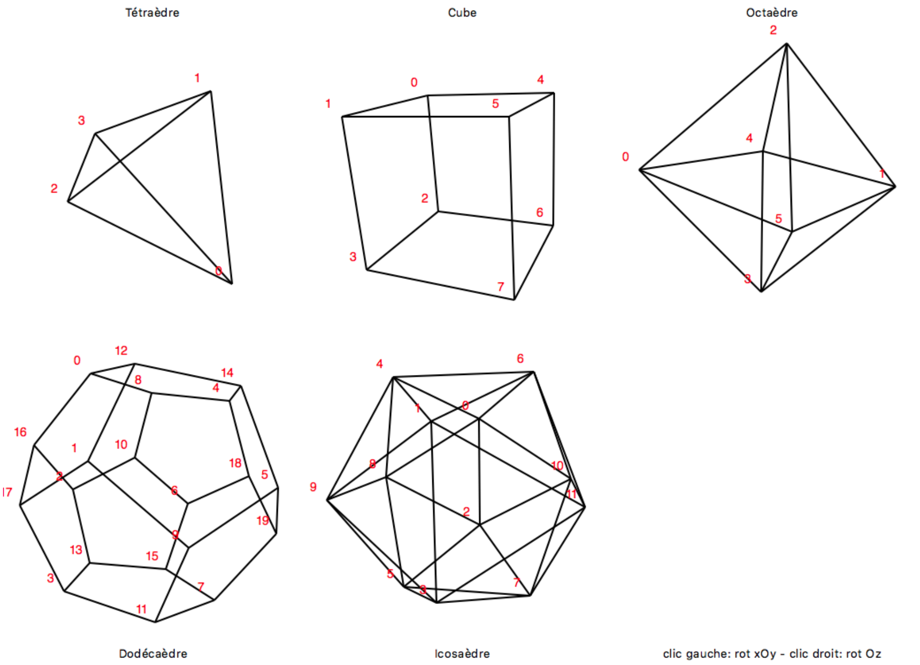
et donc $q < 3$, ce qui est impossible. Les valeurs possibles pour p sont donc $3, 4, 5$. On détermine alors facilement, pour chaque valeur de p, quelles sont les valeurs possibles de q.

p	3	4	5
q	$3, 4, 5$	3	3

On a donc au plus 5 polyèdres réguliers. Il reste évidemment à prouver leur existence, et pour cela il suffit de les exhiber. Le lecteur a sûrement déjà entendu parler des solides platoniciens. Voici, dans un tableau, les caractéristiques des 5 polyèdres réguliers convexes.

p	q	Type	Nb sommets	Nb arêtes	Nb faces
3	3	Tétraèdre	4	6	4
3	4	Octaèdre	6	12	8
3	5	Icosaèdre	12	30	20
4	3	Cube	8	12	6
5	3	Dodécaèdre	20	30	12

Le programme Python livré avec l'article permet de s'amuser avec ces 5 polyèdres. On peut les faire tourner. Un clic gauche de la souris suivi d'un déplacement de celle-ci entraîne la rotation du polyèdre choisi. On peut également faire un clic droit pour faire tourner le polyèdre autour d'un axe orthogonal à l'écran. Ci-dessous, une capture d'écran.



3 Le symbole de Schläfli

3.1 Le théorème fondamental

Un résultat tout à fait remarquable est le suivant. Il est la clé de la classification des polytopes réguliers.

Proposition 1. [Schläfli]

Dans un polytope régulier, les faces des figures de sommets sont les figures de sommets des faces.

Si vous n'avez jamais entendu parler de ce résultat, c'est normal. En effet, pour un polytope Π_n, ce théorème raconte des choses sur des polytopes Π_{n-2}. Ceci n'a donc vraiment d'intérêt que lorsque $n \geq 4$.

Regardons tout de même un exemple pour $n = 3$, celui du cube. Les faces des figures de sommets du cube sont les segments qui relient les milieux des arêtes du cube. Il y en a 26 au total. Regroupés 4 par 4, ces 26 segments sont aussi les figures de sommets des 6 carrés qui forment les faces du cube. Le lecteur est invité à regarder ce qui se passe pour les 4 autres polyèdres réguliers.

3.2 Le symbole de Schläfli

La définition qui suit prend un sens grâce au théorème de Schläfli. On définit par récurrence sur n le *symbole de Schläfli* d'un polytope régulier Π_n. Ce symbole est un $(n-1)$-uplet $\{k_1, \ldots, k_{n-1}\}$ d'entiers naturels.

Définition 3. Soit $n \geq 2$. Soit Π_n un polytope régulier. Le *symbole de Schläfli* de Π_n est le $(n-1)$-uplet $\{k_1, \ldots, k_{n-1}\}$ d'entiers naturels tel que

- Les faces de Π_n ont pour symbole de Schläfli $\{k_1, \ldots, k_{n-2}\}$
- Les figures de sommets de Π_n ont pour symbole de Schläfli $\{k_2, \ldots, k_{n-1}\}$

Il nous manque quelque chose. Comme notre définition est récursive, il s'agit de dire ce qu'est le symbole de Schläfli d'un polygone Π_2.

Pour $n = 2$, le symbole de Schläfli d'un polygone Π_2 à p sommets est $\{p\}$.

Remarque. Cette notation entre accolades existe pour des raisons historiques. Il serait évidemment préférable de mettre des parenthèses, puisque l'ordre des entiers k_i est essentiel.

Exemple. En reprenant les notations de la section précédente, les symboles de Schläfli des polyèdres en dimension 3 sont les couples $\{p, q\}$.

4 La dimension 4

Soit Π_4 un polytope régulier, de symbole de Schläfli $\{p, q, r\}$. Connaissant les polyèdres réguliers Π_3, on en déduit avec un minimum de courage les possibilités pour le triplet $\{p, q, r\}$. Ce sont

$$\{3,3,3\}, \{3,3,4\}, \{3,3,5\}$$

$$\{3,4,3\}$$

$$\{3,5,3\}$$

$$\{4,3,3\}, \{4,3,4\}, \{4,3,5\}$$

$$\{5,3,3\}, \{5,3,4\}, \{5,3,5\}$$

Tout comme en dimension 3, p, q et r vérifient une contrainte. Nous admettrons que celle-ci est

$$\sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{\pi}{r} > \cos\frac{\pi}{q}$$

Or,

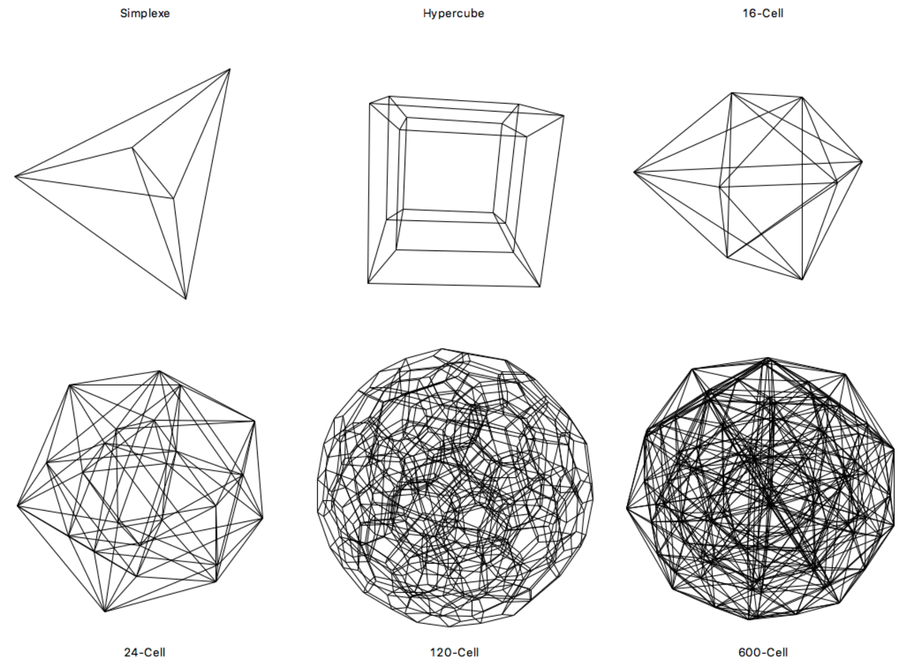
$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Il y a 6 triplets (p, q, r) passant ce test, donnant lieu à 6 polytopes réguliers candidats. Le tableau ci-dessous résume quelques faits les concernant. Nous admettons évidemment dans ce court article l'existence de ces 6 polytopes réguliers. Dans le tableau ci-dessous, F_k est le nombre de k-faces du polytope.

p	q	r	Nom	3-Faces	Fig. sommet	F_0	F_1	F_2	F_3
3	3	3	4-Simplexe	Tétraèdre	Tétraèdre	5	10	10	5
3	3	4	16-Cell	Tétraèdre	Octaèdre	8	24	32	16
4	3	3	4-Cube	Cube	Tétraèdre	16	32	24	8
3	4	3	24-Cell	Octaèdre	Cube	24	96	96	24
5	3	3	120-Cell	Dodécaèdre	Tétraèdre	600	1200	720	120
3	3	5	600-Cell	Tétraèdre	Icosaèdre	120	720	1200	600

Le programme Python livré avec l'article permet de s'amuser avec ces 6 polytopes. On peut les faire tourner. Un clic gauche ou un Shift-Clic gauche entraînent la rotation du polytope choisi dans l'espace. Un clic droit fait tourner le polytope « dans la quatrième dimension ». Ci-dessous, une capture d'écran.



Remarque. On constate dans ce tableau que certains polytopes vont deux par deux, à savoir le 16-cell et le 4-cube, et également le 120-cell et le 600-cell. Nous avons là une illustration du phénomène de dualité. Si nous prenons un polytope régulier Π_n et que nous considérons le polytope dont les sommets sont les « milieux » des faces de ce polytope (c'est à dire les barycentres des sommets des faces), nous obtenons un nouveau polytope régulier, appelé le *dual* du premier polytope. Il s'avère qu'en dimension 4, pour un polytope régulier et son dual

- Le nombre de sommets (les 0-faces) et le nombre de 3-faces sont échangés.
- Le nombre d'arêtes (les 1-faces) et le nombre de 2-faces sont échangés.

De façon générale, en dimension n, le nombre de k-faces et le nombre de $(n-1-k)$-faces sont échangés par dualité.

Le 4-simplexe et le 24-cell sont leurs propres duaux. Si nous voulions faire un parallèle avec les polyèdres en dimension 3, nous ferions volontiers les associations suivantes :

- 4-cell $\longleftrightarrow$ tétraèdre
- 4-cube $\longleftrightarrow$ cube
- 16-cell $\longleftrightarrow$ octaèdre
- 120-cell $\longleftrightarrow$ dodécaèdre
- 600-cell $\longleftrightarrow$ icosaèdre.

En regardant les figures vous verrez un air de famille. En revanche, le 24-cell n'a pas d'équivalent en dimension 3 :

Le 24-cell est un objet typiquement quadridimensionnel, son existence a été appelée par certains mathématiciens un miracle combinatoire.

5 La dimension 5

Soit Π_5 un polytope régulier, de symbole de Schläfli (p, q, r, s). Connaissant les polytopes réguliers Π_4, on en déduit les possibilités pour le triplet (p, q, r, s). Ce sont

$$\{3,3,3,3\}, \{3,3,3,4\}, \{3,3,3,5\}$$

$$\{3,3,4,3\}$$

$$\{3,4,3,3\}$$

$$\{4,3,3,3\}, \{4,3,3,4\}, \{4,3,3,5\}$$

$$\{5,3,3,3\}, \{5,3,3,4\}, \{5,3,3,5\}$$

Il s'avère que la contrainte devant être vérifiée par p, q, r, s est

$$\frac{\cos^2 \frac{\pi}{q}}{\sin^2 \frac{\pi}{p}} + \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r}}{\sin^2 \frac{\pi}{s}} < 1$$

Une vérification fastidieuse montre que seuls trois quadruplets $\{p, q, r, s\}$ sont acceptables :

$$\{3,3,3,3\}, \{4,3,3,3\}, \{3,3,3,4\}$$

Inversement, il existe effectivement trois polytopes réguliers en dimension 5.

p	q	r	s	Nom	Type de face	Figure de sommet
3	3	3	3	5-Simplexe	4-Simplexe	4-Simplexe
4	3	3	3	5-Cube	4-Cube	4-Simplexe
3	3	3	4	5-Orthoplex	4-Simplexe	4-Cube

Le 5-orthoplex et le 5-cube sont duaux l'un de l'autre, le 5-simplexe est son propre dual.

6 Au-delà de la dimension 5

Proposition 2. *Pour tout $n \geq 5$, les polytopes Π_n sont de l'un des trois types*

$$\{3,\ldots,3\},\{4,3,\ldots,3\},\{3,\ldots,3,4\}$$

Démonstration. Prouvons ce résultat par récurrence sur n. Nous avons déjà montré que c'était le cas pour $n = 5$. Soit $n \geq 6$. Supposons la propriété vraie pour les polytopes Π_{n-1}. Soit un polytope Π_n de symbole de Schläfli $\{k_1,\ldots,k_{n-1}\}$. On considère un certain nombre de cas.

- Les faces du polytope sont des Π_{n-1} de symbole de Schläfli $(3,\ldots,3)$. On a donc $k_1 = \ldots = k_{n-2} = 3$. Les figures de sommet ont alors pour symbole de Schläfli $(3,\ldots,3,k_{n-1})$ et donc $k_{n-1} = 3$ ou 4.
- Les faces du polytope sont des Π_{n-1} de symbole de Schläfli $\{4,3,\ldots,3\}$. On a donc $k_1 = 4$, $k_2 = \ldots = k_{n-2} = 3$. Les figures de sommet ont alors pour symbole de Schläfli $\{3,\ldots,3,k_{n-1}\}$ et donc $k_{n-1} = 3$ ou 4.
- Les faces du polytope sont des Π_{n-1} de symbole de Schläfli $\{3,\ldots,3,4\}$. On a donc $k_1 = \ldots = k_{n-3} = 3$ et $k_{n-2} = 4$. Les figures de sommet ont alors pour symbole de Schläfli $\{3,\ldots,3,4,k_{n-1}\}$ mais ceci est impossible par l'hypothèse de récurrence.

On trouve donc que les symboles de Schläfli possibles pour Π_n sont

$$\{3,\ldots,3\},\{3,\ldots,3,4\},\{4,3,\ldots,3\},\{4,3,\ldots,3,4\}$$

Il s'avère que le dernier cas est à rejeter, et, ô ami lecteur, je ne te dirai pas pourquoi. □

Voici donc les trois polytopes réguliers en dimension $n \geq 5$. Dans le tableau, F_k est le nombre de k-faces pour $0 \leq k \leq n-1$.

Schläfli	Nom	Type de face	Figure de sommet	F_k
$\{3,\ldots,3\}$	n-Simplexe	$(n-1)$-Simplexe	$(n-1)$-Simplexe	$\binom{n+1}{k+1}$
$\{4,3,\ldots,3\}$	n-Cube	$(n-1)$-Cube	$(n-1)$-Simplexe	$2^{n-k}\binom{n}{k}$
$\{3,\ldots,3,4\}$	n-Orthoplex	$(n-1)$-Simplexe	$(n-1)$-Cube	$2^{k+1}\binom{n}{k+1}$

Pour faire des analogies avec la dimension 3,

- n-simplexe $\longleftrightarrow$ tétraèdre.
- n-cube $\longleftrightarrow$ cube.
- n-octoplex $\longleftrightarrow$ octaèdre.

Regardez également comment le nombre de k-faces d'un polytope est égal au nombre de $(n-1-k)$-faces de son dual.

7 Bilan

Pour chaque valeur de n, combien y a-t-il de polytopes réguliers Π_n ?

- Les dimensions, $0, 1, 2$ sont évidentes.
- La dimension 3 fournit les solides platoniciens, connus depuis 2500 ans, avec deux petites merveilles qui sont le dodécaèdre et l'icosaèdre, duaux l'un de l'autre.
- La valeur de n la plus fascinante est $n = 4$: les polytopes réguliers en dimension 4 ont été étudiés et classifiés par Ludwig Schläfli au XIXème siècle.
- À partir de la dimension 5, les choses deviennent plus simples, et on pourrait dire qu'il n'y a plus de polytopes réguliers « intéressants » : les seuls polytopes réguliers sont le n-simplexe et le n-cube, prolongements évidents du triangle et du carré, ainsi que le n-octoplex, dual du n-cube, et prolongement évident de l'octaèdre en dimension 3.

n	0	1	2	3	4	≥ 5
Combien ?	1	1	∞	5	6	3

Pour terminer, livrons-nous à un petit calcul. Pour $k = 0, 1, \ldots, n$, notons F_k le nombre de k-faces d'un polytope Π_n. Calculons, pour tous les polytopes réguliers vus depuis le début de l'article, la quantité

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k F_k$$

- $n = 0$. La somme à calculer est vide, elle vaut donc 0.
- $n = 1$. On a ici $F_0 = 2$.
- $n = 2$. Un polygone régulier à N sommets possède aussi N arêtes. On a ainsi $F_0 - F_1 = 0$.
- $n = 3$. En nous reportant au tableau des polyèdres réguliers, nous trouvons que dans tous les cas, $F_0 - F_1 + F_2 = 2$.
- $n = 4$. En nous reportant au tableau des polytopes réguliers, nous trouvons que dans tous les cas, $F_0 - F_1 + F_2 - F_3 = 0$.
- Reste à examiner le cas $n \geq 5$. Regardons séparémenet le n-simplexe, le n-cube et le n-orthoplex. Pour le n-simplexe, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k F_k &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} \\
&= -\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} + 1 + (-1)^{n+1} \\
&= -(1-1)^{n+1} + 1 + (-1)^{n+1} \\
&= 1 - (-1)^n
\end{aligned}$$

Pour le n-cube,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k F_k &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k} - (-1)^n \\
&= (2-1)^n - (-1)^n \\
&= 1 - (-1)^n
\end{aligned}$$

Enfin, pour le n-orthoplex,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k F_k &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \binom{n}{k+1} 2^{k+1} \\
&= -\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} 2^{k} \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{k} + 1 \\
&= -(1-2)^n + 1 \\
&= 1 - (-1)^n
\end{aligned}$$

En résumé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, cette quantité est égale à 0 si n est pair, et à 2 si n est impair. Ceci est un cas très particulier d'un résultat beaucoup plus général. Le nombre que nous avons trouvé s'appelle la *caractéristique d'Euler-Poincaré* du polytope. Ce nombre peut être défini pour des objets beaucoup plus généraux et donne des indication précieuses sur la *topologie* des objets en question.