Suites faibles de Goodstein

Marc Lorenzi

5 octobre 2023

Soit n un entier naturel, par exemple $n = 26$. Écrivons n en base 2 et posons $g_2(n) = n$. On a donc $g_2(n) = 2^4 + 2^3 + 2^1$.

Maintenant, remplaçons tous les 2 par des 3 puis soustrayons 1. Nous obtenons le nouvel entier $g_3(n) = 3^4 + 3^3 + 3^1 - 1 = 110$.

Écrivons $g_3(n)$ en base 3 : $g_3(n) = 3^4 + 3^3 + 2$.

Recommençons en remplaçant les 3 par des 4 et en soustrayant 1. Nous obtenons $g_4(n) = 4^4 + 4^3 + 1 = 321$.

Remplaçons les 4 par des 5 et soustrayons 1 pour obtenir $g_5(n) = 5^4 + 5^3 = 750$.

Que se passe-t-il si l'on continue ? La suite $(g_b(n))_{b\geq 2}$ semble croître assez rapidement. Par exemple, $g_{1000}(26) = 1\,000\,004\,382\,535 \simeq 10^{12}$.

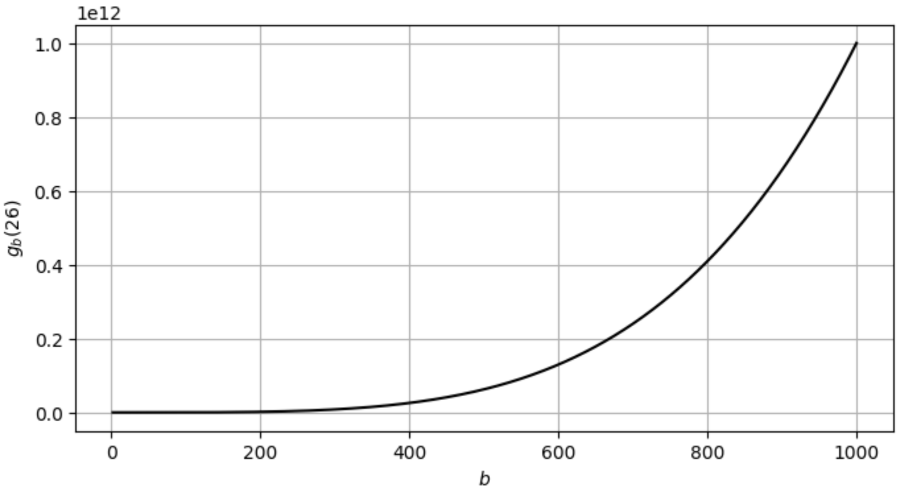

FIGURE 1 – La suite $(g_b(26))_{b\geq 2}$

Nous allons en fait montrer que quelle que soit la valeur de n, la suite $(g_b(n))_{b\geq 2}$ finit par décroître et atteindre la valeur $\ldots 0$.

1 Suites presque nulles

1.1 Introduction

Notation. $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des suites presque nulles d'entiers naturels.

$$\mathcal{S} = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, a_k = 0\}$$

Définition 1. Soit $a \in \mathcal{S}$. La *longueur* de a est

$$\ell(a) = \min\{n \in \mathbb{N} : \forall k \geq n, a_k = 0\}$$

Exemple. La suite nulle est la seule suite de longueur 0. La longueur de la suite $a = (3, 0, 1, 2, 4, 0, 0, \dots)$ est 5 parce que pour tout $k \geq 5$, $a_k = 0$, mais $a_4 \neq 0$. Plus généralement, si $a \in S$ n'est pas la suite nulle, $\ell(a)$ est l'unique entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_{n-1} \neq 0$ et pour tout $k \geq n$, $a_k = 0$. On a donc

$$\ell(a) = 1 + \max\{k \in \mathbb{N} : a_k \neq 0\}$$

1.2 Ordre lexicographique

Soient $a, b \in \mathcal{S}$. Considérons l'ensemble

$$\Delta(a, b) = \{k \in \mathbb{N} : a_k \neq b_k\}$$

Cet ensemble est une partie de $\mathbb{N}$. Il est majoré car pour tout $k \geq \max(\ell(a), \ell(b))$, $a_k = b_k = 0$. Si $a \neq b$, $\Delta(a, b) \neq \emptyset$ et donc, $\Delta(a, b)$ possède un plus grand élément que nous noterons $\delta(a, b)$.

$$\delta(a, b) = \max\{k \in \mathbb{N} : a_k \neq b_k\}$$

Remarquons que $\delta(a, b) < \max(\ell(a), \ell(b))$.

Définition 2. Pour toutes suites $a, b \in \mathcal{S}$,

$$a \prec b \iff a \neq b \text{ et } a_{\delta(a,b)} < b_{\delta(a,b)}$$

On pose également $a \preceq b$ si $a \prec b$ ou $a = b$.

Remarque. Soient $a, b \in \mathcal{S}$ telles que $\ell(a) < \ell(b)$. On a alors $\delta(a, b) = \ell(b) - 1$. De plus,

$$a_{\delta(a,b)} = 0 < b_{\delta(a,b)}$$

donc $a \prec b$.

Exemple. Soient $a = (3, 1, 2, 0, 0, \dots)$ et $b = (0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots)$. On a $\ell(a) = 3$ et $\ell(b) = 4$ donc $a \prec b$.

Exemple. Soient $a = (3, 1, 5, 2, 6, 0, 0, \ldots)$ et $b = (2, 1, 1, 3, 6, 0, 0, \ldots)$. On a $\delta(a, b) = 3$ et $a_3 < b_3$, donc $a \prec b$.

Proposition 1. *La relation $\prec$ est un ordre strict sur $\mathcal{S}$.*

Démonstration. Clairement, cette relation est irréflexive. Montrons la transitivité. Soient $a, b, c \in \mathcal{S}$. Supposons $a \prec b$ et $b \prec c$.

Supposons $\delta(a, b) < \delta(b, c)$. On a $a_{\delta(b,c)} = b_{\delta(b,c)} < c_{\delta(b,c)}$. Pour tout $k > \delta(b, c)$, on a aussi $k > \delta(a, b)$, donc $a_k = b_k = c_k$. Ainsi, $\delta(a, c) = \delta(b, c)$ et $a \prec c$.

De même, si $\delta(b, c) < \delta(a, b)$ alors $\delta(a, c) = \delta(a, b)$ et $a \prec c$.

Supposons enfin $\delta(a, b) = \delta(b, c)$. On a alors

$$a_{\delta(a,b)} < b_{\delta(a,b)} = b_{\delta(b,c)} < c_{\delta(b,c)} = c_{\delta(a,b)}$$

De plus, pour tout $k > \delta(a, b)$, $a_k = b_k = c_k$. Ainsi, $\delta(a, c) = \delta(a, b) = \delta(b, c)$ et $a \prec c$. $\square$

Remarque. Soient $a, b, c \in \mathcal{S}$ telles que $a \prec b$ et $b \prec c$. La preuve ci-dessus montre que $a \prec c$ et aussi $\delta(a, c) = \max(\delta(a, b), \delta(b, c))$.

Proposition 2. *La relation $\prec$ est un ordre strict total.*

Démonstration. Soient $a, b \in \mathcal{S}$ telles que $a \neq b$. Si $a_{\delta(a,b)} < b_{\delta(a,b)}$, alors $a \prec b$. Sinon, $b \prec a$. $\square$

1.3 Bon ordre

Proposition 3. *Toute partie non vide de $\mathcal{S}$ possède un plus petit élément.*

Démonstration. Pour toute partie A non vide de $\mathcal{S}$, notons $\ell(A)$ la plus petite longueur des éléments de A. Montrons par récurrence forte sur ℓ que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, pour toute partie non vide A de $\mathcal{S}$ telle que $\ell(A) = \ell$, A possède un plus petit élément.

Soit A une partie non vide de $\mathcal{S}$ telle que $\ell(A) = 0$. L'ensemble A contient donc la suite nulle, qui est la seule suite de longueur 0. Cette suite est le plus petit élément de $\mathcal{S}$, donc $\min A = 0$.

Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vérifiée pour tous les entiers inférieurs ou égaux à ℓ. Soit A une partie non vide de $\mathcal{S}$ telle que $\ell(A) = \ell + 1$. Notons

$$F = \{a \in A : \ell(a) = \ell + 1\}$$

Soit

$$\alpha = \min\{a_\ell : a \in F\}$$

et

$$G = \{a \in F : a_\ell = \alpha\}$$

Soit maintenant

$$B = \{(a_0, \dots, a_\ell - 1, 0, 0, \dots) : a \in G\}$$

L'ensemble B est une partie non vide de $\mathcal{S}$ et les longueurs des éléments de B sont inférieures ou égales à ℓ. Par l'hypothèse de récurrence, B possède un plus petit élément b. Posons

$$\mu = (b_0, \dots, b_{\ell-1}, \alpha, 0, 0, \dots)$$

Remarquons que $\ell(\mu) = \ell + 1$ et $\mu \in G$, donc aussi $\mu \in A$. Montrons que $\mu = \min A$. Pour cela, soit $a \in A$. Si $\ell(a) > \ell + 1$, alors $\mu \prec a$. Sinon, par minimalité de $\ell + 1$, $\ell(a) = \ell + 1 = \ell(\mu)$. On a alors

$$a = (a_0, \dots, a_\ell, 0, 0, \dots)$$

Si $a_\ell > \alpha$, alors $\mu \prec a$. Sinon, par minimalité de α, $a_\ell = \alpha = \mu_\ell$. Dans ce cas, $a \in G$ et $(a_0, \dots, a_{\ell-1}, 0, 0, \dots) \in B$. De là, $b \preceq (a_0, \dots, a_{\ell-1}, 0, 0, \dots)$ et donc, facilement, $\mu \preceq a$. $\square$

Proposition 4. *Toute suite décroissante d'éléments de $\mathcal{S}$ est stationnaire.*

Démonstration. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{S}$. Considérons l'ensemble

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

L'ensemble A est une partie non vide de $\mathcal{S}$, il possède donc un plus petit élément a_{n_0}. Par la décroissance de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour tout $n \geq n_0$, $a_n \preceq a_{n_0}$. Par la minimalité de a_{n_0}, on a pour tout $n \geq n_0$, $a_{n_0} \preceq a_n$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, $a_n = a_{n_0}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire. $\square$

Corollaire 5. *Il n'existe pas de suite strictement décroissante d'éléments de $\mathcal{S}$.*

Démonstration. Une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{S}$ est stationnaire, elle ne peut donc pas décroître strictement. $\square$

2 Suites de Goodstein

Pour être exacts, nous allons parler ici de ce que l'on appelle parfois les *suites faibles* de Goodstein. Nous dirons quelques mots sur les suites « fortes » de Goodstein à la fin de l'article.

2.1 Introduction

Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2. Tout entier $n \in \mathbb{N}$ s'écrit de façon unique

$$n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b^k$$

où les a_k sont des entiers presque tous nuls appartenant à $[\![0, b-1]\!]$. Ce résultat d'existence et d'unicité nous dit qu'une certaine fonction φ_b est bijective. Précisons un peu.

Notons $\mathcal{S}_b$ l'ensemble des suites presque nulles d'entiers de $[\![0, b-1]\!]$. On a $\mathcal{S}_b \subset \mathcal{S}$. L'application $\varphi_b : \mathcal{S}_b \longrightarrow \mathbb{N}$ définie pour tout $a \in \mathcal{S}_b$ par

$$\varphi_b(a) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b^k$$

est une bijection. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_b^{-1}(n)$ est la suite des chiffres de la décomposition de n en base b.

Soient $b, c \geq 2$ tels que $b \leq c$. On a $\mathcal{S}_b \subseteq \mathcal{S}_c$. Nous disposons alors de *l'application de changement de base* $B_{b,c} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$B_{b,c} = \varphi_c|_{\mathcal{S}_b} \circ \varphi_b^{-1}$$

Informellement, si $n \in \mathbb{N}$, on obtient $B_{b,c}(n)$ de la façon suivante :

- On écrit n en base b :
$$n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b^k$$
- On remplace tous les b par des c :
$$B_{b,c}(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k c^k$$

Remarque. Si $b < c$, $\varphi_c|_{\mathcal{S}_b}$ n'est pas une bijection de $\mathcal{S}_b$ sur $\mathbb{N}$. L'application $B_{b,c}$ n'est donc pas une bijection.

Notation. Pour tout $b \geq 2$, $S_b = B_{b,b+1}$.

Voici $S_2(n)$ pour quelques valeurs de n.

2.2 Suites de Goodstein

Définition 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite (faible) de Goodstein associée à n est la suite $(g_b(n))_{b\geq 2}$ définie par récurrence sur b par $g_2(n) = n$ et, pour tout $b \geq 2$,

- Si $g_b(n) = 0$, la suite est finie et s'arrête au rang b.
- Sinon,
$$g_{b+1}(n) = S_b(g_b(n)) - 1$$

Notation. Pour tout $b \geq 2$ tel que $g_b(n)$ est défini, nous noterons

$$\sigma_b(n) = \varphi_b(g_b(n))$$

Notation. S'il existe un entier b tel que $g_b(n) = 0$, nous noterons $\mathcal{N}(n)$ cet entier. $g_b(n)$ est alors défini pour $2 \leq b \leq \mathcal{N}(n)$. Sinon, nous poserons $\mathcal{N}(n) = +\infty$. Dans ce cas, $g_b(n)$ est défini pour tout $b \geq 2$.

Nous allons montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}(n) < +\infty$.

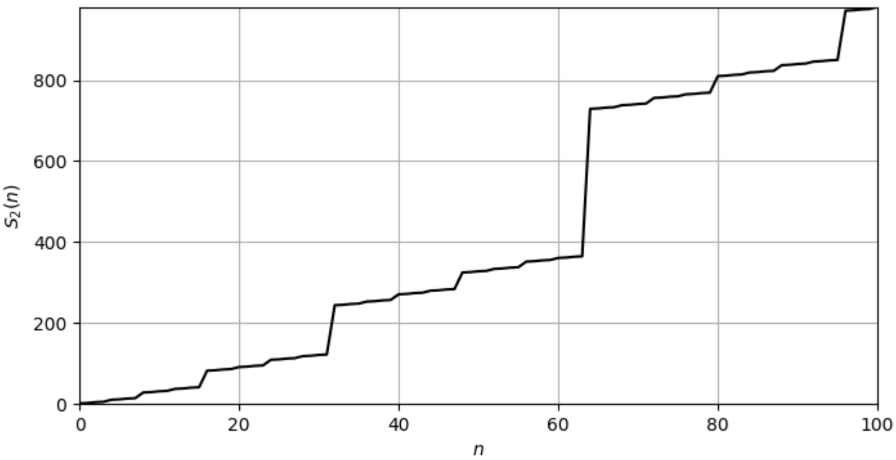

FIGURE 2 – La suite $(S_2(n))_{n\in\mathbb{N}}$

2.3 Exemples

On a $\mathcal{N}(4) = 23$. La suite de Goodstein associée à 4 est

(4, 8, 9, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0)

On a $\mathcal{N}(5) = 63$. La suite de Goodstein associée à 5 est

(5, 9, 15, 17, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 31, 31, 31, 31, 31, 31, 31, 31, 31, 31, 31, 31, 31, 31, 31, 31, 30, 29, 28, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0)

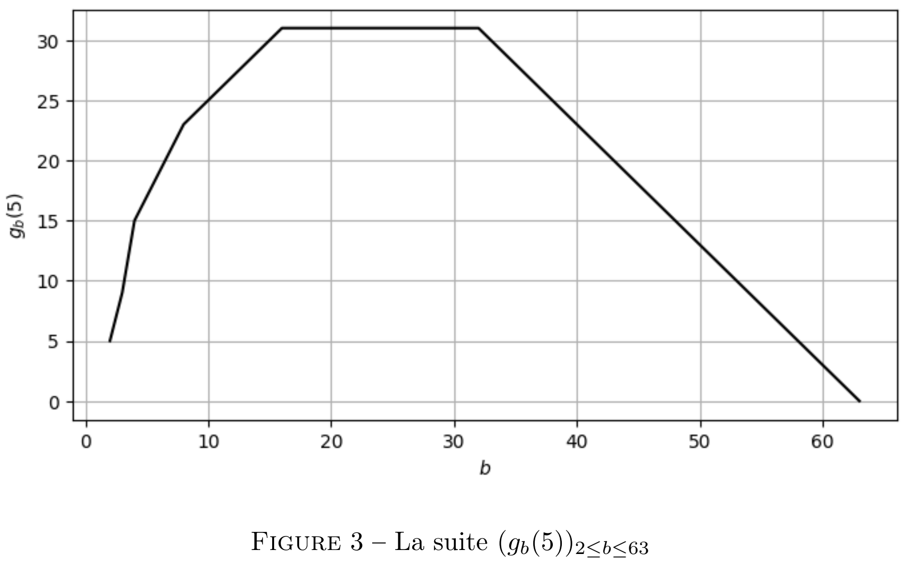

FIGURE 3 – La suite $(g_b(5))_{2\leq b\leq 63}$

On remarque tout d'abord une phase de croissance. La suite atteint son maximum pour $b = 16$. On a $g_{16}(5) = 31$. On observe ensuite un plateau jusqu'à

$b = 32$. Enfin, la suite décroît vers 0 par pas de 1.

On a aussi $\mathcal{N}(6) = 383$, $\mathcal{N}(7) = 2047$ et

$$\mathcal{N}(8) = 3 \times 2^{402\,653\,211} - 1$$

Nous montrerons plus loin que $\mathcal{N}(8)$ est effectivement égal à ce terrible entier.

2.4 Finitude

Proposition 6. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $b \in [\![2, \mathcal{N}(n)[\![$. Alors, $\sigma_{b+1}(n) \prec \sigma_b(n)$.*

Démonstration. Écrivons $\sigma_b(n) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Soit j le plus petit entier naturel tel que $a_j > 0$. On a

$$g_b(n) = \sum_{k=j}^{\infty} a_k b^k$$

De là,

$$\begin{aligned} g_{b+1}(n) &= \sum_{k=j}^{\infty} a_k (b+1)^k - 1 \\ &= a_j (b+1)^j - 1 + \sum_{k=j+1}^{\infty} a_k (b+1)^k - 1 \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} a_j (b+1)^j - 1 &= (a_j - 1)(b+1)^j + (b+1)^j - 1 \\ &= (a_j - 1)(b+1)^j + b \sum_{k=0}^{j-1} (b+1)^k \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sigma_b(n) &= (0, 0, \ldots, 0, a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots) \\ \sigma_{b+1}(n) &= (b, b, \ldots, b, a_j - 1, a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots) \end{aligned}$$

En notant $\sigma_{b+1}(n) = (a'_0, a'_1, \ldots)$, on a $a'_j < a_j$ et pour tout $k > j$, $a'_k = a_k$, donc $\sigma_{b+1}(n) \prec \sigma_b(n)$. $\square$

Proposition 7. *La suite $(g_b(n))$ est finie.*

Démonstration. Supposons la suite $(g_b(n))_{b \geq 2}$ infinie. La suite $(\sigma_b(n))_{b \geq 2}$ est alors une suite strictement décroissante d'éléments de $\mathcal{S}$, contradiction. $\square$

3 La monotonie de la suite $(g_b(n))$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons vu sur les exemples du début de l'article que la suite $(g_b(n))$ croît avant d'arriver à un plateau, puis décroît jusqu'à 0. Nous allons voir que ceci est général. Ci-dessous, le graphe de $g_b(7)$ en fonction de b.

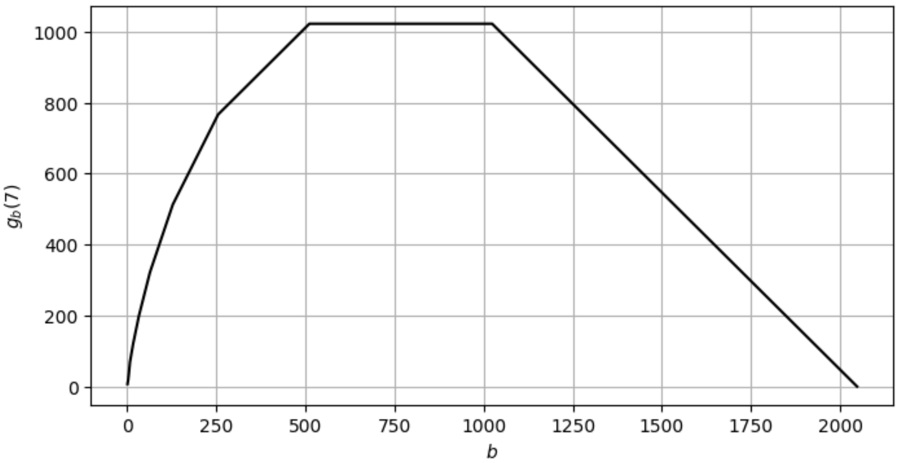

FIGURE 4 – La suite $(g_b(7))_{2\leq b\leq 2047}$

3.1 Quelques remarques

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $b \geq 2$. Posons

$$g_b(n) = \sum_{k=0}^{d} a_k b^k$$

où $d \in \mathbb{N}$, les a_k appartiennent à $[\![0, b-1]\!]$ et $a_d \neq 0$. Comparons $g_b(n)$ et $g_{b+1}(n)$.

- Si $d = 0$, alors

$$g_{b+1}(n) = a_0 - 1 < g_b(n)$$

- Si $d = 1$, alors $g_{b+1}(n) - g_b(n) = a_1 - 1$. De là,
  - Si $a_1 \geq 2$, alors $g_{b+1}(n) > g_b(n)$.
  - Si $a_1 = 1$, alors $g_{b+1}(n) = g_b(n)$.

• Si $d \geq 2$, alors

$$\begin{aligned} g_{b+1}(n) - g_b(n) &= \sum_{k=0}^{d} a_k((b+1)^k - b^k) - 1 \\ &\geq a_d((b+1)^d - b^d) - 1 \\ &= a_d \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j} b^j - 1 \\ &\geq d a_d b - 1 > 0 \end{aligned}$$

Pour résumer, $g_{b+1}(n) < g_b(n)$ si et seulement si $d = 0$ et dans ce cas la suite décroît de 1. Également, $g_{b+1}(n) = g_b(n)$ si et seulement si $d = 1$ et $a_1 = 1$.

3.2 La décroissance

Comme $g_2(n) = n > 0$ et qu'il existe un entier b tel que $g_b(n) = 0$, la suite $(g_b(n))$ n'est pas croissante. Il existe donc un entier $b_0 \geq 2$ tel que $g_{b_0+1}(n) < g_{b_0}(n)$. Par les remarques du paragraphe précédent, on a nécessairement $g_{b_0+1}(n) = g_{b_0}(n) - 1$. Prenons pour b_0 le plus petit tel entier.

Toujours par les remarques du paragraphe précédent,

$$g_{b_0}(n) = a_0$$

où $a_0 \in [\![0, b_0 - 1]\!]$.

Peut-on avoir $b_0 = 2$? C'est le cas uniquement si $g_2(n) = n = a_0$ où $a_0 \in [\![0, 1]\!]$. Comme $n \neq 0$, cela ne peut survenir que lorsque $n = 1$. Dans la suite, nous supposerons $n \geq 2$ et donc $b_0 \geq 3$.

Supposons un court instant que $a_0 \leq b_0 - 3$. On a alors

$$g_{b_0-1}(n) = a_0 + 1 > g_{b_0}(n)$$

ce qui contredit la minimalité de b_0. Supposons maintenant que $a_0 = b_0 - 2$. Posons

$$g_{b_0-1}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k (b_0 - 1)^k$$

où les a'_k appartiennent à $[\![0, b_0 - 2]\!]$. On a alors

$$g_{b_0}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k b_0^k - 1 = b_0 - 2$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} a'_k b_0^k = b_0 - 1$$

Le membre de gauche est l'écriture de $b_0 - 1$ en base b, donc pour tout $k \geq 1$, $a'_k = 0$ et $a'_0 = b_0 - 1$. On a ici encore une contradiction, puisque $a'_0 \leq b_0 - 2$.

Finalement, on a $a_0 = b_0 - 1$. De là, facilement, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $b_0 + k \leq \mathcal{N}(n)$,

$$g_{b_0+k}(n) = a_0 - k$$

En particulier, en prenant $k = \mathcal{N}(n) - b_0$,

$$0 = g_{\mathcal{N}(n)}(n) = a_0 - \mathcal{N}(n) + b_0 = 2b_0 - \mathcal{N}(n) - 1$$

Ainsi,

$$\boxed{b_0 = \frac{1}{2}\left(\mathcal{N}(n) + 1\right)}$$

Remarquons que ceci entraîne que $\mathcal{N}(n) \equiv 1 \bmod 2$.

Remarque. Par la minimalité de b_0, la suite $(g_b(n))$ croît pour $2 \leq b \leq b_0$. Notre étude montre que cette suite décroît ensuite par pas de 1 pour $b_0 \leq b \leq \mathcal{N}(n)$.

3.3 Le plateau

Retenons $b_0 = \frac{1}{2}\left(\mathcal{N}(n) + 1\right)$ et $g_{b_0}(n) = b_0 - 1$. On a facilement

$$g_{b_0-1}(n) = b_0 - 1 = g_{b_0}(n)$$

Ainsi, il existe un entier $b_1 < b_0$ tel que $g_{b_1}(n) = g_{b_1+1}(n)$. Prenons un tel entier b_1 minimal. Par les remarques faites au premier paragraphe,

$$g_{b_1}(n) = a_0 + b_1$$

où $a_0 \in [\![0, b_1 - 1]\!]$.

Remarque. Peut-on avoir $b_1 = 2$? On a alors $g_2(n) = n = a_0 + 2$ et donc $n = 2$ ou $n = 3$. Nous supposerons dans la suite que $n \geq 4$ (et donc $b_1 \geq 3$).

Posons

$$g_{b_1-1}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k (b_1 - 1)^k$$

où les a'_k appartiennent à $[\![0, b_1 - 2]\!]$. On a alors

$$g_{b_1}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k b_1^k - 1 = a_0 + b_1$$

Supposons un court instant $a_0 \leq b_1 - 2$. On a alors $a'_0 = a_0 + 1$, $a'_1 = 1$ et pour tout $k \geq 2$, $a'_k = 0$. De là,

$$g_{b_1-1}(n) = a_0 + 1 + b_1 - 1 = a_0 + b_1 = g_{b_1}(n)$$

ce qui contredit la minimalité de b_1. Ainsi, $a_0 = b_1 - 1$.

Écrivons maintenant que $g_{b_1}(n) = g_{b_0}(n)$. On obtient

$$2b_1 - 1 = b_0 - 1$$

et donc

$$\boxed{b_1 = \frac{1}{2} b_0 = \frac{1}{4}\left(\mathcal{N}(n) + 1\right)}$$

Remarquons que ceci entraîne que $\mathcal{N}(n) \equiv 3 \bmod 4$.

3.4 Résumé

Par la minimalité de b_1, la suite $(g_b(n))$ croît strictement pour $2 \leq b \leq b_1$. Elle est ensuite constante pour $b_1 \leq b \leq b_0$. Puis, comme nous l'avons déjà remarqué, elle décroît strictement par pas de 1 pour $b_0 \leq b \leq \mathcal{N}(n)$. La valeur maximale de la suite $(g_b(n))$ est donc atteinte sur le plateau, et vaut donc $g_{b_0}(n) = b_0 - 1$.

Voici les valeurs de $\mathcal{N}(n)$, b_0 et b_1 pour les entiers $n \leq 7$. L'entier

$$L(n) = b_0 - b_1 + 1$$

est la longueur du plateau.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{N}(n)$	2	3	5	7	23	63	383	2047
b_0	2	2	3	4	12	32	192	1024
b_1	2	2	2	2	6	16	96	512
$L(n)$	1	1	2	3	7	17	97	513

Voici en résumé les valeurs que nous avons examinées. On suppose que $n \geq 3$.

- Début du plateau :
$$b_1 = \frac{1}{4}\left(\mathcal{N}(n) + 1\right)$$
- Fin du plateau :
$$b_0 = \frac{1}{2}\left(\mathcal{N}(n) + 1\right)$$
- Longueur du plateau :
$$L(n) = \frac{1}{4}\left(\mathcal{N}(n) + 5\right)$$
- Valeur maximale de $g_b(n)$:
$$b_0 - 1 = \frac{1}{2}\left(\mathcal{N}(n) - 1\right)$$

4 La valeur de $\mathcal{N}(n)$

Dans cette section, n désigne un entier naturel. Tout au long de nos raisonnements, nous prendrons les exemples $n = 7$ et $n = 8$. À la fin de la section, nous « calculerons » $\mathcal{N}(9)$ et $\mathcal{N}(10)$.

4.1 Le premier chiffre

Soit $b \geq 2$. Posons
$$\sigma_b(n) = (a_0, a_1, \ldots)$$
Si $a_0 > 0$ alors $\sigma_{b+1}(n) = (a_0 - 1, a_1, \ldots)$. Puis, si $a_0 - 1 > 0$, $\sigma_{b+2}(n) = (a_0 - 2, a_1, \ldots)$, etc. On a donc facilement

$$\sigma_{b+a_0}(n) = (0, a_1, \ldots)$$

Exemple. On a $\sigma_2(7) = (1, 1, 1, 0, \ldots)$ et donc, en prenant $b = 2$ et $a_0 = 1$,

$$\sigma_3(7) = (0, 1, 1, 0, \ldots)$$

Exemple. On a $\sigma_3(8) = (2, 2, 2, 0, \ldots)$ et donc, en prenant $b = 3$ et $a_0 = 2$,

$$\sigma_5(8) = (0, 2, 2, 0, \ldots)$$

4.2 Le second chiffre

Passons au second chiffre. Soit $b \geq 2$. Supposons que

$$\sigma_b(n) = (0, a_1, a_2, \ldots)$$

Le terme suivant de la suite est

$$\sigma_{b+1}(n) = (b, a_1 - 1, a_2, \ldots)$$

On se retrouve avec un terme constant strictement positif. De là, en utilisant le paragraphe précédent,

$$\sigma_{2b+1}(n) = (0, a_1 - 1, a_2, \ldots)$$

Par une récurrence facile on a pour tout $k \leq a_1$,

$$\sigma_{2^k(b+1)-1}(n) = (0, a_1 - k, a_2, \ldots)$$

et donc, en prenant $k = a_1$,

$$\sigma_{2^{a_1}(b+1)-1}(n) = (0, 0, a_2, \ldots)$$

Exemple. Pour $n = 7$ et $b = 3$, on a $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, donc

$$\sigma_7(7) = (0, 0, 1, 0, \ldots)$$

Exemple. Pour $n = 8$ et $b = 5$, on a $a_0 = 0$ et $a_1 = 2$, donc

$$\sigma_{23}(8) = (0, 0, 2, 0, \ldots)$$

Regroupons les résultats des deux premiers paragraphes.

Proposition 8. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $b \geq 2$. Posons $\sigma_b(n) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. On a alors*

$$\sigma_{2^{a_1}(b+a_0+1)-1}(n) = (0, 0, a_2, \ldots)$$

4.3 Superpuissances

Soit $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par

$$\psi(x) = x2^x$$

Définition 4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$x^{[k]} = \psi^k(x)$$

Exemple. $x^{[0]} = x$, $x^{[1]} = x2^x$, $x^{[2]} = x2^x 2^{x2^x}$, $x^{[3]} = x2^x 2^{x2^x} 2^{x2^x 2^{x2^x}}$, etc.

Lemme 9. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$,*

$$x^{[k+\ell]} = (x^{[k]})^{[\ell]}$$

Démonstration. Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} x^{[k+\ell]} &= \psi^{k+\ell}(x) = \psi^\ell \circ \psi^k(x) \\ &= \psi^\ell(\psi^k(x)) = \psi^\ell(x^{[k]}) \\ &= (x^{[k]})^{[\ell]} \end{aligned}$$

□

4.4 Le troisième chiffre

Proposition 10. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $b \geq 2$. On suppose que*

$$\sigma_b(n) = (0, 0, a_2, \ldots)$$

On a alors

$$\sigma_{(b+1)^{[a_2]}-1}(n) = (0, 0, 0, a_3, \ldots)$$

Démonstration. Faisons une récurrence sur a_2. Si $a_2 = 0$, alors

$$(b+1)^{[a_2]} - 1 = b$$

et le résultat est immédiat. Soit $a_2 \geq 1$. Supposons l'égalité vraie pour $a_2 - 1$. On a

$$\sigma_{b+1}(n) = (b, b, a_2 - 1, \ldots)$$

De là, en appliquant la proposition 8 avec $a_0 = a_1 = b$ et $b = b + 1$,

$$\sigma_{2^{b+1}(b+1)-1}(n) = (0, 0, a_2 - 1, \ldots)$$

ou encore

$$\sigma_{(b+1)^{[1]}-1}(n) = (0, 0, a_2 - 1, \ldots)$$

Par l'hypothèse de récurrence,

$$\sigma_{((b+1)^{[1]})^{[a_2-1]}-1}(n) = (0, 0, 0, a_3, \ldots)$$

Il reste à remarquer que, par le lemme 9,

$$((b+1)^{[1]})^{[a_2-1]} = (b+1)^{[a_2]}$$

□

Exemple. Nous avons vu que $\sigma_7(7) = (0, 0, 1, 0, \ldots)$. De là, en prenant $n = 7$ et $b = 7$ dans la proposition 10,

$$\mathcal{N}(7) = 8^{[1]} - 1 = 8 \times 2^8 - 1 = 2047$$

Exemple. Nous avons vu que $\sigma_{23}(8) = (0, 0, 2, 0, \ldots)$. De là, en prenant $n = 8$ et $b = 23$ dans la proposition 10,

$$\mathcal{N}(8) = 24^{[2]} - 1$$

Calculons cet entier. Tout d'abord,

$$24^{[1]} = 24 \times 2^{24}$$

Puis

$$\begin{aligned} 24^{[2]} &= 24 \times \times 2^{24} \times 2^{24 \times 2^{24}} \\ &= 3 \times 2^3 \times 2^{24} \times 2^{24 \times 2^{24}} \\ &= 3 \times 2^{3+24+24 \times 2^{24}} \\ &= 3 \times 2^{402653211} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{N}(8) = 3 \times 2^{402653211} - 1$$

En regroupant tout ce qui précède, nous avons le résultat suivant.

Proposition 11. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $b \geq 2$. Posons $\sigma_b(n) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. On a alors $\sigma_{b'}(n) = (0, 0, 0, a_3, \ldots)$ où*

$$b' = (2^{a_1}(b + a_0 + 1))^{[a_2]} - 1$$

4.5 $\mathcal{N}(9)$

On a

$$g_2(9) = 9 = 2^3 + 1$$
$$g_3(9) = 3^3 = 27$$
$$g_4(9) = 4^3 - 1 = 63 = 3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 3$$

Ainsi,

$$\sigma_4(9) = (3, 3, 3, 0, \ldots)$$

Appliquons la proposition 11 avec $b = 4$ et $a_0 = a_1 = a_2 = 3$. Il vient

$$\mathcal{N}(9) = (2^3(4 + 3 + 1))^{[3]} - 1 = 64^{[3]} - 1$$

En posant $\mu = 64$,

$$\mathcal{N}(9) = \mu^{[3]} - 1 = \mu 2^{\mu} 2^{\mu 2^{\mu}} 2^{\mu 2^{\mu} 2^{\mu 2^{\mu}}} - 1$$

4.6 $\mathcal{N}(10)$

On a

$$g_2(10) = 10 = 2^3 + 2$$
$$g_3(10) = 3^3 + 2 = 29$$
$$g_4(10) = 4^3 + 1 = 63$$
$$g_5(10) = 5^3 = 125$$
$$g_6(10) = 6^3 - 1 = 5 \times 6^2 + 5 \times 6 + 5$$

et donc

$$\sigma_6(10) = (5, 5, 5, 0, \ldots)$$

Appliquons la proposition 11 avec $b = 6$ et $a_0 = a_1 = a_2 = 5$ pour obtenir

$$\mathcal{N}(10) = (2^5(6 + 5 + 1))^{[3]} - 1 = 384^{[3]} - 1$$

En posant $\mu = 384$,

$$\mathcal{N}(10) = \mu 2^{\mu} 2^{\mu 2^{\mu}} 2^{\mu 2^{\mu} 2^{\mu 2^{\mu}}} 2^{\mu 2^{\mu} 2^{\mu 2^{\mu}} 2^{\mu 2^{\mu} 2^{\mu 2^{\mu}}}} 2^{\mu 2^{\mu} 2^{\mu 2^{\mu}} 2^{\mu 2^{\mu} 2^{\mu 2^{\mu}}} 2^{\mu 2^{\mu} 2^{\mu 2^{\mu}} 2^{\mu 2^{\mu} 2^{\mu 2^{\mu}}}}} - 1$$

5 Annexe - Les « vraies » suites de Goodstein

Reprenons l'entier $n = 26$ que nous avions considéré au début de l'article et posons $G_2(n) = n$. En base 2,

$$G_2(n) = 2^4 + 2^3 + 2^1$$

Écrivons aussi les exposants supérieurs ou égaux à 2 en base 2.

$$G_2(n) = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1$$

Remplaçons tous les 2 par des 3 et soustrayons 1. Nous obtenons un nouvel entier

$$G_3(n) = 3^{3^{3^1}} + 3^{3^1+1} + 3^1 - 1 = 7625597485070$$

Écrivons n_1 en base 3, exposants compris.

$$G_3(n) = 3^{3^{3^1}} + 3^{3^1+1} + 2$$

Remplaçons tous les 3 par des 4 et soustrayons 1. Nous obtenons un nouvel entier

$$G_4(n) = 4^{4^{4^1}} + 4^{4^1+1} + 2$$

La valeur de $G_4(n)$ est

1340780792994259709957402499820584612747936582059239337772356144372176403007354697680187429816690342769003185818648605085375388281194656994643 3649006085122

Définissons de façon correcte le passage d'un entier au suivant.

Définition 5. Soit $b \geq 2$. On définit la fonction $S_b : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ comme suit. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrivons

$$n = \sum_{j=1}^{d} a_j b^{k_j}$$

où $d \in \mathbb{N}$, les a_j appartiennent à $[\![1, b-1]\!]$ et $k_1 < \ldots < k_d$. On pose alors

$$S_b(n) = \sum_{j=1}^{d} a_j (b+1)^{S_b(k_j)}$$

Proposition 12. *Soit $b \geq 2$. L'entier $S_b(n)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence forte sur n. Pour $n = 0$, $d = 0$. La somme sur j est une somme vide, on a donc $S_b(0) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tout $m < n$, $S_b(m)$ est bien défini. Écrivons $n = \sum_{j=1}^{d} a_j b^{k_j}$. On a alors pour tout $j \in [\![1, d]\!]$,

$$k_j < b^{k_j} \leq n$$

donc $S_b(k_j)$ est bien défini. Ainsi, $S_b(n)$ est aussi bien défini. □

Voici $S_2(n)$ pour quelques valeurs de l'entier n.

n	$S_2(n)$
0	0
1	1
2	3
3	4
4	27
5	28
6	30
7	31
8	81
9	82
10	84
11	85
12	108
13	109
14	111
15	112
16	7625597484987
17	7625597484988
18	7625597484990

Exemple. Reprenons l'entier $n = 26$.

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1$$

et donc

$$S_2(26) = 3^{S_2(4)} + 3^{S_2(3)} + 3^{S_2(1)}$$

Il reste à calculer $S_2(4)$, $S_2(3)$ et $S_2(1)$. Les détails sont laissés en exercice, prenons les valeurs dans le tableau ci-dessus. On a donc

$$S_2(26) = 3^{27} + 3^4 + 3^1 = 7625597485071$$

Remarquons que

$$26 = 2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1$$

et

$$S_2(26) = 3^{3^3} + 3^{3^1+1} + 3^1$$

Informellement, pour calculer $S_b(n)$,

- On écrit n en *base héréditaire* b, c'est à dire qu'on écrit n en base b, mais aussi, les exposants des puissances de b, les exposants des exposants, etc.
- On remplace toutes les occurrences de b par $b + 1$.

Définition 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. La *suite de Goodstein* associée à n est la suite $(G_b(n))_{b\geq 2}$ définie par $G_2(n) = n$ et, pour tout $b \geq 2$, si $G_b(n) \neq 0$ alors

$$G_{b+1}(n) = S_b(G_b(n)) - 1$$

Sinon la suite est finie et s'arrête au rang b.

Tout comme pour les suites faibles de Goodstein que nous avons étudiées, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la suite forte de Goodstein $(G_b(n))$ est une suite finie.

Théorème 13. [Goodstein]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(G_b(n))$ est finie.

La preuve de ce théorème utilise des *ordinaux transfinis* et va bien au-delà du cadre de cet article. Bien que ce résultat s'exprime dans le cadre de l'arithmétique de Peano (PA), Goodstein a également démontré qu'il est impossible de le prouver dans le cadre de PA.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{N}'(n)$ le premier entier $b \geq 2$ tel que $G_b(n) = 0$. Regardons simplement ce qui se passe pour les entiers 3 et 4. Facilement, les entiers $G_b(3)$ sont $3, 3, 3, 2, 1, 0$. La suite termine au rang $b = 7$. On a donc $\mathcal{N}'(3) = 7$.

Passons à $n = 4$. On a

$$G_2(4) = 2^2$$

et donc

$$G_3(4) = 3^3 - 1 = 7 = 2 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 2$$

Les exposants apparaissant dans l'écriture de $G_3(4)$ sont tous des entiers strictement inférieurs à 3. Si nous remarquons que

$$G_3(4) = g_3(8)$$

nous en déduisons facilement que les suites $(G_b(4))$ et $(g_b(8))$ coïncident à partir de $b = 3$. Il en résulte que

$$\mathcal{N}'(4) = \mathcal{N}(8) = 3 \times 2^{402\,653\,211} - 1$$

Bibliographie

- J.-R. Abrial, *Formal Proof of the Weak Goodstein Theorem.*
- A.E. Caicedo, *Goodstein's Function* (1987).
- R.L. Goodstein, *On the Restricted Ordinal Theorem*, J. Symbolic Logic, 9 (1944), 33-41.
- J.M. Henle, *An Outline of Set Theory*, Springer Verlag (1986).
- L. Kirby, J. Paris, *Accessible Independence Results for Peano Arithmetic*, Bull. Math. Society, 14 (1982), 285-293.
- M. Rathjen, *Goodstein's Theorem Revisited* (2014).