

Commutation des termes d'une série semi-convergente

Marc Lorenzi

24 juin 2024

Plan

- 1 Introduction
- 2 Premières sommes partielles
- 3 Cas général
- 4 Nombres harmoniques
- 5 Passage à la limite
- 6 Somme de la série
- 7 Densité

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. On considère la série de terme général u_n , $n \geq 1$, formée à partir de la série harmonique alternée (en abrégé SHA) $\sum (-1)^{n-1}/n$ comme suit.

- On prend les p premiers termes positifs de SHA : $u_1 = 1/1$, $u_2 = 1/3$, $\dots$, $u_p = 1/(2p-1)$.
- On prend ensuite les q premiers termes négatifs de SHA : $u_{p+1} = -1/2$, $u_{p+2} = -1/4$, $\dots$, $u_{p+q} = -1/(2q)$.
- etc.

Pour tout $n \geq 1$, notons S_n la n^{e} somme partielle de notre série.
Posons $r = p + q$. On a

$$S_r = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2q}$$

$$\begin{aligned} S_r &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2q} \\ S_{2r} &= S_r + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+3} + \dots + \frac{1}{4p-1} \\ &\quad - \frac{1}{2q+2} - \frac{1}{2q+4} - \dots - \frac{1}{4q} \end{aligned}$$

$$S_r = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2q}$$

$$S_{2r} = S_r + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+3} + \dots + \frac{1}{4p-1} \\ - \frac{1}{2q+2} - \frac{1}{2q+4} - \dots - \frac{1}{4q}$$

$$S_{3r} = S_{2r} + \frac{1}{4p+1} + \frac{1}{4p+3} + \dots + \frac{1}{6p-1} \\ - \frac{1}{4q+2} - \frac{1}{4q+4} - \dots - \frac{1}{6q}$$

Plus généralement, pour tout $n \geq 1$,

$$S_{nr} = S_{(n-1)r} + \frac{1}{(2n-2)p+1} + \frac{1}{(2n-2)p+3} + \dots + \frac{1}{2np-1} \\ - \frac{1}{(2n-2)q+2} - \frac{1}{(2n-2)q+4} - \dots - \frac{1}{2nq}$$

On en déduit

$$S_{nr} = \sum_{k=0}^{np-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{nq} \frac{1}{2k} = S' - S''$$

Nous allons écrire S_{nr} à l'aide des nombres harmoniques

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

La somme S'' ne pose pas de problème.

$$S'' = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{nq} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} H_{nq}$$

Pas trop de difficultés non plus pour S' .

$$\begin{aligned} S' &= \sum_{k=0}^{np-1} \frac{1}{2k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{2np} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{2k} \\ &= H_{2np} - \frac{1}{2} H_{np} \end{aligned}$$

Rappelons le développement asymptotique

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où $\gamma \simeq 0.577215$ est la *constante d'Euler*.

Nous avons

$$\begin{aligned}
 S_{nr} &= H_{2np} - \frac{1}{2}H_{np} - \frac{1}{2}H_{nq} \\
 &= \ln(2np) + \frac{1}{4np} - \frac{1}{2}\ln(np) - \frac{1}{4np} - \frac{1}{2}\ln(nq) - \frac{1}{4nq} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
 &= \ln \frac{2np}{\sqrt{n^2pq}} - \frac{1}{4nq} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
 &= \ln 2\sqrt{\frac{p}{q}} - \frac{1}{4nq} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$S_{nr} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$$

où

$$\ell = \ln \left(2\sqrt{\frac{p}{q}} \right)$$

Le terme général de notre série tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Les suites de terme général $S_{nr+1}, S_{nr+2}, \dots, S_{nr+r-1}$ tendent donc aussi vers ℓ . Par la réciproque du théorème des suites extraites, S_n tend vers ℓ . Finalement, la série converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \ln \left(2\sqrt{\frac{p}{q}} \right)$$

Soit E l'ensemble des sommes possibles pour notre série.

$$E = \left\{ \ln(2\sqrt{t}) : t \in \mathbb{Q}_+^* \right\}$$

Proposition. E est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit

$$y = \frac{1}{4}e^{2x}$$

Par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers y . Comme $y > 0$ on peut choisir ces rationnels dans $\mathbb{Q}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(2\sqrt{t_n}) \in E$ et $\ln(2\sqrt{t_n})$ tend vers $\ln(2\sqrt{y}) = x$. $\square$